MP-MPI-PC-PSI

MATHÉMATIQUES

Réussir les écrits des CONCOURS

Méthodes, conseils, erreurs à éviter

Concours E3A-Polytech

ellipses

CHAPITRE 1

REMARQUES PRÉLIMINAIRES

1.1 Comment utiliser ce livre

1.1.1 Choisir un exercice

Avant de se lancer dans un exercice, lire les thèmes qui y sont abordés et faire le point sur le cours concerné.
Les exercices présentés dans ce livre couvrent une grande partie du programme de chaque filière, il ne faut pas se limiter à vos chapitres préférés.

Crayon en main, lire intégralement et attentivement l'énoncé choisi afin de :

- repérer les questions que vous pensez savoir traiter ainsi que celles qui donnent des indications sur les résultats des questions précédentes ;

- noter les données essentielles : l'espace vectoriel considéré, les valeurs prises par les variables, etc. ;

- identifier les parties de votre cours abordées par l'exercice.

Comparer alors votre travail avec le paragraphe « Premier survol ».

1.1.2 Chercher et rédiger

La résolution d'une question n'est pas forcément immédiate, il est parfois utile de passer à la suite en admettant le résultat et d'y revenir ultérieurement. Des idées peuvent voir le jour à la lecture des questions suivantes. Regarder immédiatement le corrigé n'est pas la bonne option.
Lorsqu'un calcul ou un raisonnement ne semblent pas aboutir au brouillon, il est judicieux de remettre en cause la stratégie choisie.
Un minimum de technicité est indispensable pour qu'un calcul élémentaire ne soit pas un obstacle à la réussite d'une question.

Pour chaque question, ne pas perdre de vue le but recherché, souvent clairement annoncé.
En guise d'exemples :

• Lorsqu'il s'agit de démontrer une équivalence, il ne faut pas oublier de démontrer les deux sens : le sens direct et la réciproque.

• Une démonstration par récurrence doit être scrupuleusement rédigée, sans oublier de souligner chaque étape, en prenant garde au rang à partir duquel la propriété doit être démontrée.

Enfin il faut vérifier la pertinence des réponses apportées au regard de l'ensemble de l'exercice : ces réponses ne doivent ni être contradictoires ni empiéter sur les résultats attendus ensuite.

1.2 Stratégie pendant l'épreuve

Avant toute chose, il est impératif de lire l'intégralité du sujet, c'est-à-dire tous les exercices qu'il comporte. Cette lecture doit être faite « crayon à la main », en prenant des notes, dans le but de repérer les exercices que vous pensez pouvoir traiter au mieux. Vous pouvez aussi, pendant cette première lecture, relever les questions qui peuvent être traitées rapidement.
Pour chaque exercice, repérer les hypothèses fondamentales, par exemple : $n \in \mathbb{N}^*$, α est un réel positif...
Les questions de cours ne doivent pas être négligées puisqu'elles sont basiques et valorisées dans le barème. Ne pas oublier que ces questions ont un intérêt pour le reste de l'exercice. Elles seront un socle sur lequel vous pourrez vous appuyer pour certaines des questions suivantes.
Il faut réussir à doser le temps consacré à une question qui vous résiste : il est important de vous laisser une période de réflexion ou de calcul. Toutefois, il peut être judicieux d'admettre un résultat, en le signalant clairement, pour passer à la suite, quitte à revenir sur cette question plus tard.
Le « bluf »ne paie pas ! Il est très préjudiciable de masquer des erreurs, des calculs inaboutis, des raisonnements bancals.
Certaines expressions, qui donnent une très mauvaise impression au correcteur, sont à bannir : « Il est évident que », « Il est trivial », « Forcément ».
Avant de passer à un autre exercice, il est nécessaire de se relire.
De même, en fin d'épreuve, il faut vous réserver du temps pour reprendre l'ensemble de votre travail, vérifier et compléter la numérotation de vos copies, corriger les fautes d'orthographe, encadrer les résultats...

1.3 Mathématiques

La connaissance du cours est impérative. Quelques résultats fondamentaux sont incontournables, par exemple :

• Tous les résultats sur le trinôme du second degré : résolution des équations du second degré, relations coefficients-racines, signe...

• Fonctions usuelles : ensemble de définition, dérivée, primitives...

• Somme des termes d'une suite géométrique ;

• Développements limités et développements en séries entières usuels avec leur domaine de convergence ;

• Relation de Bernoulli, formule du binôme ;

• Nombres complexes : module, arguments, racines n-ième de l'unité...

• ... cette liste n'est pas exhaustive.

Les calculs doivent être clairement présentés sur une copie aérée, ils sont rarement chronophages. Si un calcul vous paraît inaccessible, c'est probablement qu'il y a une erreur dans votre raisonnement. Il ne faut pas hésiter alors à changer la façon dont vous avez abordé le problème : relire les résultats obtenus aux questions précédentes peut vous aider à découvrir une nouvelle approche. Il est nécessaire de vérifier vos calculs tout au long de leur déroulement et il est parfois fort utile d'utiliser un brouillon pour présenter ensuite un résultat le plus propre et concis possible.
Un entraînement aux calculs, même s'il vous semble répétitif, est indispensable pendant toute votre formation pour pouvoir vous consacrer au raisonnement mathématique. Les opérations sur les fractions et les puissances posent trop souvent des problèmes, par exemple dans la recherche de développements limités, dans les calculs de primitives, dans les calculs de sommes...
Les théorèmes du cours doivent être cités précisément en vérifiant rigoureusement toutes leurs hypothèses. Par exemple, citer le théorème fondamental de l'analyse sans vérifier la continuité de l'intégrande ne permet pas de conclure.
Les quantificateurs, les implications et les équivalences doivent être manipulés avec précaution et à bon escient. Ce ne sont pas des abréviations, on ne mélange pas une phrase en français et une expression mathématique.
Un raisonnement par récurrence doit être mené avec rigueur : il faut expliciter précisément la propriété à démontrer et faire apparaître clairement chaque étape.

1.4 Présentation

Les exercices d'un sujet sont indépendants : ils peuvent être traités dans n'importe quel ordre, mais doivent être clairement séparés sur la copie. La numérotation des questions doit apparaître sur la copie et la numérotation des pages doit être cohérente.
Il faut prêter une attention particulière à l'orthographe, notamment pour certaines expressions mathématiques : **Le théorème spectral** (sans e), **Le triangle de Pascal** (sans e), **Bernoulli** (sans *i* avant les deux *l*).
Pour faciliter la lecture de la copie par le correcteur, il est essentiel d'encadrer les résultats importants et de faire des phrases complètes. De plus, les abréviations utilisées au cours de l'année ne sont pas toujours connues des correcteurs et il faut donc les éviter :

« TITT »à la place du théorème d'intégration terme à terme, " CSSA " pour citer le critère spécial des séries alternées. De même, une référence au cours de votre professeur n'est pas pertinente : par exemple « Le théorème 3 du cours »n'a pas de sens pour le correcteur...

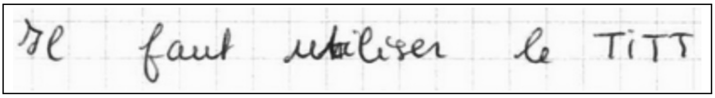


FIGURE 1.1 – Un théorème avec un intitulé déroutant. Il faut éviter les abréviations.

Enfin, il est inutile de recopier l'intégralité des questions avant d'en proposer une réponse.

1.5 Vu dans les copies...

Pour certains exercices corrigés et commentés, quelques " perles " relevées dans des copies seront présentées.
Ces illustrations, même si elles égaient quelque peu l'ouvrage, n'ont pas un but divertissant. Elles permettent de réfléchir sur les maladresses et les erreurs fréquentes et vous invitent à remettre en question vos propres connaissances ou (mauvaises) habitudes. Nous vous encourageons à étudier ces exemples qui sont éclectiques : des erreurs de rédaction, de calcul, des confusions sur les notations, des mélanges de concepts.
Des maladresses les moins graves aux fautes les plus gênantes, l'analyse de ces " perles " vous permettra de mieux comprendre certaines notions du programme.

1.5.1 Calcul matriciel

Le calcul élémentaire sur les matrices est parfois oublié et source de grande confusion.

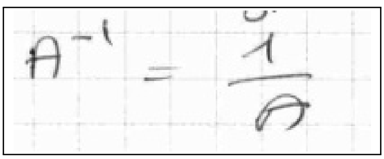


FIGURE 1.2 – Une confusion inquiétante dans le calcul matriciel.

1.5.2 Calcul polynomial

Parmi les premières questions traditionnelles d'exercices concernant les polynômes, la division euclidienne tient une place de choix.
Un candidat doit être en mesure d'exposer clairement cette propriété, de repérer le quotient et le reste.

1. $X^{n+1}-1 = (X-1)(1+X+\dots+X^n)$

Donc le quotient de la division dans $\mathbb{R}[X]$ de $(X^{n+1}-1)$ par $(X-1)$:

$\boxed{Q=1}$ et le reste $\boxed{R = 1+X+\dots+X^n}$

FIGURE 1.3 – La division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ doit être maîtrisée.

1.5.3 Erreurs de raisonnement

L'affirmation ci-dessous, fausse, met en évidence la confusion entre le sens direct et la réciproque, ainsi qu'entre ce qui est nécessaire et ce qui est suffisant.

9) Pour que la matrice B soit diagonalisable, il est necessaire que son polynome caractéristiqué soit scindé à racine simple

FIGURE 1.4 – Les connecteurs logiques sont à la base des raisonnements mathématiques.

1.5.4 Calcul sur les complexes - Trigonométrie

De très nombreuses erreurs apparaissent chaque année concernant le calcul élémentaire dans $\mathbb{C}$.
Les calculs de modules et d'arguments, pour des complexes usuels, donnent lieu à des réponses embarrassantes.

Questions de cours :

1) * Module :

$$|e^{i\theta}| = |-i\sin\theta| = 1$$

* Argument :

$$\arg(e^{i\theta}) = -\frac{\pi}{2}$$

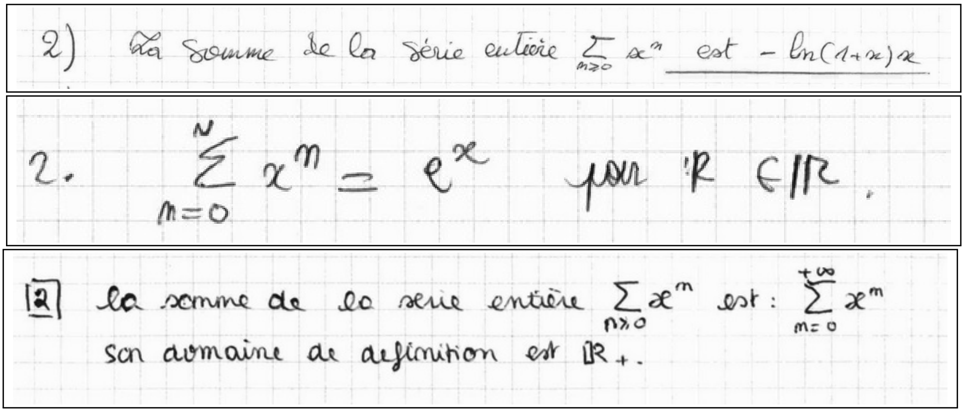
2) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\sin(n\pi + t) = \sin(n\pi)\sin t = (-1)^n \sin t$$

FIGURE 1.5 – Un exemple de calcul de module et d'argument bien dérangeant.

1.5.5 *Séries*

Connaître la somme des séries entières usuelles est essentiel. Encore faut-il connaître précisément le rayon de convergence de ces séries, et, mieux encore, leur domaine de définition.



2) La somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} x^n$ est $-\ln(1+x)x$

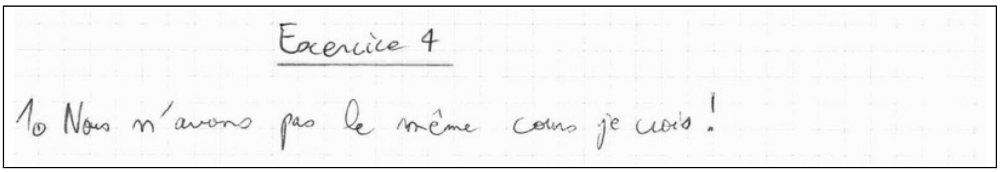
2. $\sum_{n=0}^{N} x^n = e^x$ pour 'R $\in \mathbb{R}$.

[2] la somme de la serie entière $\sum_{n\geq 0} x^n$ est : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
son domaine de definition est $\mathbb{R}_+$.

FIGURE 1.6 – Les séries entières usuelles doivent être connues avec leur domaine de définition.

1.5.6 *Courtoisie*

La courtoisie est vivement encouragée, il est mal venu de critiquer le sujet sur sa copie. Les concepteurs du sujet suivent scrupuleusement les programmes officiels des CPGE.



Exercice 4

1. Nous n'avons pas le même cours je crois !

FIGURE 1.7 – Une réponse à une « Question de cours ».

CHAPITRE 2

ALGÈBRE LINÉAIRE ET POLYNÔMES

2.1 PSI-2024-EXO2

2.1.1 Énoncé

On note $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

On rappelle que pour tout $(x,t) \in [0,1]^2$, on note $\min(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant t \\ t & \text{sinon} \end{cases}$.

Questions préliminaires

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs de α, l'équation différentielle

$$y'' + \alpha y = 0.$$

2. Soient $h \in E$ et $a \in [0,1]$. Justifier que la fonction $H : x \mapsto \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et déterminer sa dérivée.

*****

3. Cas particuliers

3.1. Tracer la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \min\left(\frac{1}{3}, t\right)$ sur $[0,1]$.

3.2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\,\mathrm{d}t$.

3.3. Soit x un réel de $[0,1]$, exprimer $\displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de x.

4. Soit $f \in E$.

4.1. Justifier que $F : x \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$ définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, calculer $F'(x)$.

4.2. Calculer $F(0)$ et $F'(1)$.

4.3. Démontrer alors que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et montrer que $F'' = -f$.

À toute fonction f de E, on associe $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que T est un endomorphisme de E.

6. L'application T est-elle injective ?

7. On pose $A = \left\{G \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}), G(0) = G'(1) = 0\right\}$.

7.1. Montrer que $\mathrm{Im}(T) \subset A$.

7.2. Soit $G \in A$. Calculer $T(G'')$.

7.3. Déterminer $\mathrm{Im}(T)$.

8. Recherche des éléments propres de T

8.1. Démontrer par l'absurde que, si λ est une valeur propre de T, alors λ est strictement positive. *On pourra utiliser la question **4.***

8.2. Déterminer les valeurs propres de T. *On pourra aussi utiliser la question **4.***

8.3. Pour chaque valeur propre de T, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

2.1.2 Premier survol

- Exercice mêlant analyse et algèbre linéaire comme c'est souvent le cas.

- **Nous ne travaillons pas ici en dimension finie** :

– Ne surtout pas invoquer le théorème du rang !

– Dans ce cas, un endomorphisme peut très bien être injectif (ou surjectif) sans être surjectif (ou injectif).

- Bien souvent dans ce genre d'exercice, la recherche des éléments propres d'un endomorphisme passe par la résolution d'une équation différentielle, comme celle proposée en question préliminaire.

- On tient compte du rappel : $\min(a,b)$ désigne **le plus petit des deux réels a et b**.

Par exemple, $\min(a,2) = \begin{cases} a & \text{lorsque } a \leqslant 2 \\ 2 & \text{lorsque } 2 \leqslant a \end{cases}$