

CONCOURS PROFESSEUR DES ÉCOLES

ADMISSIBILITÉ

2^e édition

CRPE
2023

MATHS

Le manuel pour réussir l'épreuve écrite



Des tests d'autoévaluation



Tous les savoirs disciplinaires



La méthode de l'épreuve



120 exercices corrigés



Un sujet officiel de la
session 2022 corrigé

OFFERT
en ligne

- Le guide du concours
- 150 QCM
- + Sujet 2022 corrigé

M. Loison (dir.)
F. Bianco (coord.)
V. Bouquillon-
Sadaune,
J.-R. Delplace

N°1 **Vuibert**
DES CONCOURS

CONCOURS PROFESSEUR DES ÉCOLES

ADMISSIBILITÉ

CRPE
2023

MATHS

Le manuel pour réussir l'épreuve écrite

Ouvrage dirigé par Marc Loison

Docteur en histoire de l'éducation et sciences de l'éducation,
maître de conférences honoraire en histoire contemporaine de l'université d'Artois,
ancien conseiller pédagogique chargé de mission académique pour l'éducation prioritaire,
ancien président de jury CRPE

Ouvrage coordonné par Franky Bianco

Conseiller pédagogique EPS et généraliste en circonscription primaire,
membre du jury académique CRPE et membre du groupe départemental Maths 62

Valérie Bouquillon-Sadaune

Conseillère pédagogique départementale en maternelle, inspection académique
du Pas-de-Calais, et membre du jury académique CRPE

Jean-Robert Delplace

Professeur honoraire en INSPE, agrégé de mathématiques,
titulaire d'un master 2 en didactique des mathématiques

N°1 **Vuibert**
DES CONCOURS

Ressources numériques pour réussir le CRPE

Téléchargez :

- notre guide du concours ;
- un second sujet 2022 corrigé ;
- 150 QCM interactifs ;
- les repères de progression et les attendus de fin de cycle.



ou [www.Vuibert.fr/site/213959](http://www.vuibert.fr/site/213959)

ISBN : 978-2-311-21395-9

Conception et réalisation de la couverture : Delphine d'Inguibert et Valérie Goussot/Caroline Joubert (Atelier du livre)/Séverine Tanguy

Conception de l'intérieur : Bleu T/Caroline Joubert (Atelier du livre)

Composition : STDI



La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Le « photocopillage », c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le « photocopillage » menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération. En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur.

S'adresser au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20, rue des Grands-Augustins, F-75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70

© Vuibert – juin 2022 – 5, allée de la 2^e DB – 75015 Paris

Site Internet : <http://www.vuibert.fr>

Sommaire

Avant-propos	7	QCM d'autoévaluation	10
Mode d'emploi	8	Table des savoir-faire à maîtriser	20

PARTIE 1 / NOMBRES ET CALCULS

1 LES DIFFÉRENTS TYPES DE NOMBRES

Autoévaluation	22
----------------------	----

Cours	24
-------------	----

1. Nombres entiers naturels	24
2. Nombres entiers relatifs	25
3. Nombres rationnels	25
4. Nombres décimaux	26
5. Nombres irrationnels	27
6. Représentations des ensembles de nombres	27
7. Une autre écriture des nombres	28
8. Écriture scientifique d'un nombre	30

Entraînements	31
---------------------	----

Corrigés	33
----------------	----

2 NUMÉRATION DE POSITION

Autoévaluation	38
----------------------	----

Cours	41
-------------	----

1. Généralités	41
2. Systèmes de numérations à base	42

Entraînements	48
---------------------	----

Corrigés	54
----------------	----

3 NOMBRES ET OPÉRATIONS

Autoévaluation	62
----------------------	----

Cours	64
-------------	----

1. L'addition	64
2. La soustraction	66
3. La multiplication	66
4. La division	69
5. Opérations et calcul littéral	72

Entraînements	74
---------------------	----

Corrigés	82
----------------	----

4 ARITHMÉTIQUE

Autoévaluation	91
----------------------	----

Cours	94
-------------	----

1. Multiples et diviseurs	94
2. Nombres premiers	96
3. Division euclidienne	99

Entraînements	100
---------------------	-----

Corrigés	106
----------------	-----

PARTIE 2 / ESPACE ET GÉOMÉTRIE

5 ÉLÉMENTS DE BASE DE LA GÉOMÉTRIE PLANE EUCLIDIENNE

Autoévaluation 118

Cours 120

1. Plan et droites du plan 120
2. Positions relatives de deux droites du plan 122
3. Notion de longueur et de distance 124
4. Repérage d'un point 127

Entraînements 130

Corrigés 132

6 ANGLES

Autoévaluation 141

Cours 143

1. Définition 143
2. Classification des angles 143
3. Mesure d'un angle 144
4. Positions possibles de deux angles 144
5. Droites sécantes, droites parallèles et angles 145
6. Angles et triangles 146
7. Notion de trigonométrie 147

Entraînements 149

Corrigés 155

7 POLYGONES

Autoévaluation 164

Cours 166

1. Polygones 166
2. Trapèzes 167
3. Parallélogrammes 168
4. Triangles 172

Entraînements 177

Corrigés 180

8 GRANDS THÉORÈMES

Autoévaluation 189

Cours 191

1. Théorème de Pythagore 191
2. Théorème de Thalès 192

Entraînements 193

Corrigés 195

9 TRANSFORMATIONS DU PLAN

Autoévaluation 199

Cours 201

1. Translation 201
2. Symétrie axiale 202
3. Symétrie centrale 202
4. Rotation 203
5. Homothétie 204

Entraînements 205

Corrigés 212

10 SOLIDES

Autoévaluation 220

Cours 222

1. Polyèdres 222
2. Polyèdres réguliers 224
3. Différents types de polyèdres 225
4. Solides non polyèdres 226
5. Patron d'un solide 227
6. Sections planes de solides 228
7. Droites et plans de l'espace 229
8. Repérage sur/dans un solide 230

Entraînements 233

Corrigés 236

PARTIE 3 / GRANDEURS ET MESURES

11 GRANDEURS, GRANDEURS DE LA GÉOMÉTRIE ET FORMULES DE MESURES

Autoévaluation 246

Cours 248

1. Définitions 248

2. Grandeurs usuelles 249

3. Formules usuelles 251

Entraînements 255

Corrigés 260

PARTIE 4 / ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

12 PROPORTIONNALITÉ

Autoévaluation 268

Cours 270

1. Définitions 270

2. Propriétés des suites proportionnelles... 272

Entraînements 277

Corrigés 281

13 APPLICATIONS USUELLES DE LA PROPORTIONNALITÉ

Autoévaluation 289

Cours 292

1. Pourcentages 292

2. Échelles 295

3. Vitesse, distance et temps 296

Entraînements 297

Corrigés 303

14 FONCTIONS

Autoévaluation 310

Cours 312

1. Définitions et notations 312

2. Fonctions usuelles 312

3. Représentation graphique
d'une fonction 313

Entraînements 316

Corrigés 321

15 STATISTIQUES

Autoévaluation 326

Cours 328

1. Vocabulaire 328

2. Éléments caractéristiques d'une série
statistique 331

Entraînements 334

Corrigés 337

16 PROBABILITÉS

Autoévaluation 343

Cours 346

1. Langage des probabilités 346

2. Calcul des probabilités 349

Entraînements 351

Corrigés 355

PARTIE 5 / PROBLÈMES

17 PROBLÈMES RÉSOLUS PAR L'ARITHMÉTIQUE OU PAR L'ALGÈBRE

Autoévaluation 362

Cours 364

1. Résolution par la méthode algébrique ... 364

2. Résolution par une méthode
arithmétique 366

Entraînements 369

Corrigés 375

PARTIE 6 / ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

18 TABLEUR INFORMATIQUE ET LOGICIEL SCRATCH

Autoévaluation 384

Cours 387

1. Vocabulaire 387

2. Le logiciel Scratch 390

Entraînements 398

Corrigés 407

PARTIE 7 / SUJET CORRIGÉ

19 SUJET CORRIGÉ

Énoncé 416

Corrigés 423

Vers l'oral 430

Index 431

Depuis quelques années, de manière récurrente, il est indiqué dans les rapports de jury CRPE que l'on attend des candidats qu'ils manifestent leur **engagement dans la construction des compétences professionnelles** telles qu'elles sont définies dans le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation (arrêté du 1^{er} juillet 2013).

L'arrêté du 25 janvier 2021, relatif à la réforme du CRPE, indique clairement qu'une **dimension fortement professionnalisante** est désormais dévolue aux épreuves écrites et orales d'admissibilité et d'admission.

Au regard de ce constat nous avons opéré plusieurs choix éditoriaux qui se caractérisent par leur originalité mais aussi et surtout leur volonté de répondre aux réels besoins des candidats.

Au-delà de la nécessaire maîtrise des contenus disciplinaires de l'épreuve écrite de mathématiques clairement affichée dans ce manuel (indication et rappel des notions conformes aux programmes de collège et de seconde, le tout ponctué de nombreux exercices d'entraînement), nous avons pris le parti, dans les entraînements « Vers l'oral », d'éclairer les notions disciplinaires majeures par une réflexion portant sur **la traduction du savoir savant en savoir enseigné, démarche indispensable en amont de toute conception de séance d'enseignement** (détermination de compétences et d'objectifs notionnels ; formulation de pistes d'activités, de propositions d'institutionnalisation et d'évaluation). Cette réflexion, menée dans le prolongement des révisions disciplinaires, constituera à n'en pas douter une plus-value lorsque le candidat sera amené, dans le cadre de l'entraînement à l'épreuve orale, dite de leçon, à **analyser un corpus documentaire à des fins de conception et d'animation d'une séance d'enseignement en mathématiques**.

Par ailleurs, ce manuel propose quelques outils innovants qui viendront compléter et structurer la préparation au CRPE à savoir :

- un **test d'autoévaluation** en début d'ouvrage ;
- une **table des savoir-faire** à maîtriser et **des outils** mis à disposition ;
- des **indications de durée** pour tous les entraînements ;
- une table de correspondances avec **des renvois à notre manuel consacré à la leçon** ;
- un **index** en fin d'ouvrage pour retrouver facilement dans le manuel de mathématiques toutes les **notions clés à maîtriser, régulièrement signalées dans les rapports de jurys**.

Les auteurs de cet ouvrage et moi-même espérons que ce manuel ainsi conçu et doté de ses multiples outils méthodologiques vous permettra de vous préparer efficacement à l'épreuve écrite d'admissibilité de mathématiques.

Sa mise en œuvre éditoriale n'aurait pas été possible sans l'aide précieuse de Sophie Bravard et Stéphanie Herbaut, éditrices, que je tiens ici personnellement à remercier.

Marc Loison, directeur de l'ouvrage

Mode d'emploi

En début de manuel

QCM d'autoévaluation

Dans ce QCM, chaque question peut n'avoir aucune réponse correcte, ou une, ou deux, ou trois.

Nombres et calculs

- Combien de zéros y a-t-il dans l'écriture du nombre de milliards de millions de ?
 - a. 5
 - b. 10
 - c. 15
 - d. 20
- Le nombre 100 200 000 :
 - a. n'a pas de diviseur
 - b. n'a pas de diviseur
 - c. a exactement deux diviseurs
 - d. a au moins trois diviseurs
- On considère la fraction $\frac{201}{435}$:
 - a. 201 est un nombre premier.
 - b. La fraction est irréductible.
 - c. La fraction est l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal.
 - d. La fraction est l'écriture d'un nombre rationnel.
- La fraction irréductible égale à $\frac{882}{1124}$ est :
 - a. $\frac{7}{9}$
 - b. $\frac{14}{9}$
 - c. $\frac{63}{81}$
 - d. $\frac{63}{567}$

Un QCM d'autoévaluation pour identifier vos forces et vos faiblesses et vous aider à organiser vos révisions

Dans chaque chapitre

Une liste des savoir-faire à acquérir pour vous fixer des objectifs d'apprentissage

Un QCM pour faire le point sur vos connaissances

9 Transformations du plan

Savoir-faire à maîtriser pour le concours :

- Connaître les différentes transformations du plan, leurs invariants et leurs propriétés de conservation.
- Reconnaître les axes ou les centres de symétrie d'une figure.
- Construire l'image d'une figure par une transformation du plan.
- Résumer, pour deux figures données, s'il existe une symétrie axiale, une symétrie centrale, une translation, une rotation ou une homothétie qui transforme l'une d'elles en l'autre.
- Construire l'agrandissement ou la réduction d'une figure par homothétie.
- Utiliser les propriétés de ces transformations dans des démonstrations.

AUTOÉVALUATION

- Pour chaque question, il peut y avoir plusieurs bonnes réponses.
- Parmi les figures suivantes, laquelle (ou lesquelles) possède(nt) un centre de symétrie ?
 - a. un triangle rectangle isocèle
 - b. un triangle équilatéral
 - c. un parallélogramme
 - d. un pentagone régulier
 - Par une symétrie axiale, la symétrique d'une droite D est :
 - a. une droite parallèle à D
 - b. une droite
 - c. une droite jamais sécante à D
 - d. une droite parfois perpendiculaire à D
 - Deux carrés superposés se correspondent :
 - a. toujours par une translation
 - b. toujours par une symétrie centrale
 - c. toujours par une rotation
 - d. parfois par une symétrie axiale
 - Un triangle peut posséder :
 - a. un centre de symétrie
 - b. un axe de symétrie
 - c. deux axes de symétrie
 - d. trois axes de symétrie
 - Un parallélogramme possède :
 - a. deux axes de symétrie
 - b. un axe de symétrie
 - c. un centre de symétrie
 - d. quatre axes de symétrie
 - Quand deux droites sont perpendiculaires, l'une est :
 - a. une translation transformant l'une en l'autre
 - b. une symétrie centrale transformant l'une en l'autre
 - c. une symétrie axiale transformant l'une en l'autre
 - d. une rotation transformant l'une en l'autre
 - Par une homothétie, un rectangle peut être transformé en :
 - a. un rectangle de même dimension
 - b. un rectangle de dimensions plus grandes
 - c. un rectangle de dimensions plus petites
 - d. un cercle

Des conseils de formateurs pour faire le lien entre les différentes notions

CONSEILS

Les transformations usuelles du plan sont la traduction mathématique d'actions concrètes, différentes pour la translation, adossées pour la symétrie axiale, action de tourner à 180° pour la symétrie centrale, action de tourner pour la rotation et action d'agrandir ou de réduire pour une homothétie. Il est donc utile de comprendre que, par les transformations usuelles, l'homothétie, comme agissant dans le cours, conserve toutes les propriétés des figures, sauf les longueurs. Mais ce n'est pas pour cette raison que les propriétés géométriques de ces transformations se définissent par une transformation, car chacune d'elles la définit pour elle-même par une réflexion mathématique précise, notion qui fait l'objet de la théorie. L'importance de la symétrie axiale et centrale pour la symétrie centrale, l'homothétie est en lien avec la théorie de Thales et la proportionnalité, et la rotation avec les cercles.

CORRIGES

- c. Le centre de symétrie d'un parallélogramme est le milieu commun de ses diagonales.
- b. et d. Exemple pour la réponse d. :
- d. Pour que les deux carrés se correspondent par une translation, il faut qu'ils occupent une position particulière l'un par rapport à l'autre. Ces deux carrés se correspondent par une translation, par une symétrie centrale et par une symétrie axiale. Il existe toujours une transformation transformant l'un de ces carrés en l'autre.
- a. triangle isocèle et d. triangle équilatéral
- c. Voir question 1.
- a. et d. Ne pas méprendre deux symétries : une symétrie axiale transforme un point en un autre point, les axes de symétrie étant les bissectrices des deux droites données.
- a. b. et d. Montrer que le rapport de l'homothétie est égal, supérieur ou inférieur à 1.

Des renvois vers le cours pour vous reporter vers les notions non maîtrisées

Un cours illustré d'exemples pour bien assimiler les notions

Des exercices d'application pour mettre en pratique les principales notions

AUTOÉVALUATION | **COURS** | **ENTRAÎNEMENTS** | **CORRIGES**

COURS

1 Translation

A. Définition

L'image d'un point M par la translation qui transforme le point A en le point A' est le point M' tel que A, A' et M, M' sont en parallélisme.

B. Propriétés

Une translation correspond à un glissement, et par conséquent, une translation conserve les propriétés des figures.

- L'image d'un segment est un segment de la même longueur.
- L'image d'un angle est un angle de la même mesure.
- L'image d'une droite est une droite de la même mesure.
- L'image de deux droites parallèles est deux droites parallèles.
- L'image de deux droites perpendiculaires est deux droites perpendiculaires.

De plus, par une translation, l'image d'une droite est une droite parallèle à celle-ci.

APPLICATION 1

On considère un triangle ABC. Construire l'image A'B'C' de ce triangle par la translation qui transforme le point B en C.

Rechercher le point D. C'est le milieu du segment [BC].

9 Transformations du plan

2 Symétrie axiale

A. Définition

L'image d'un point M par la symétrie (axiale) d'axe D est le point M' tel que D est la médiatrice du segment [MM'].

B. Propriétés

Une symétrie axiale correspond à un retournement, et par conséquent, une symétrie axiale conserve toutes les propriétés des figures.

Une figure 3D possède un axe de symétrie D lorsque la symétrique par rapport à D de tout point de 3D est un point de 3D. Autrement dit, la figure symétrique de 3D par rapport à D est 3D.

APPLICATION 2

Construire la symétrique d'un parallélogramme ABCD par rapport à sa diagonale (AC).

APPLICATION 3

On considère un triangle ABC isocèle en A. Les points E et F sont placés sur les côtés [AB] et [AC] de telle sorte que AE = AF. Démontrer que la médiatrice du segment [EF] est aussi la médiatrice du segment [BC].

3 Symétrie centrale

A. Définition

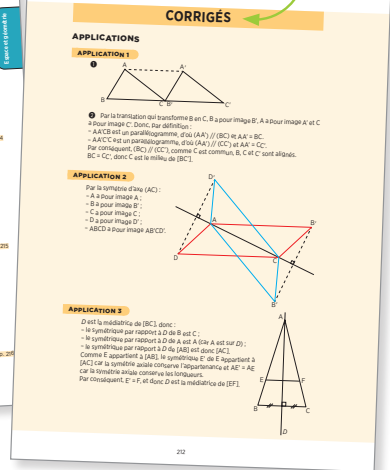
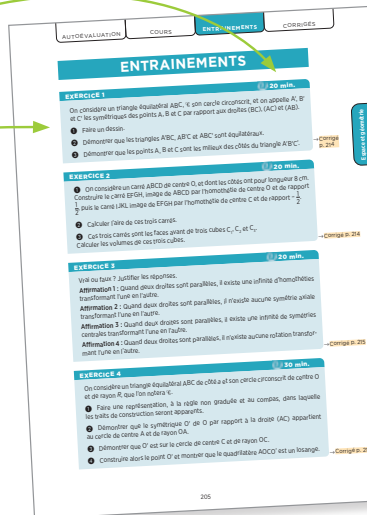
L'image d'un point M par la symétrie (centrale) de centre O est le point M' tel que O est le milieu du segment [MM'].

Des renvois vers d'autres exercices pour approfondir votre entraînement

Des renvois vers les corrigés pour vous évaluer

De nombreux exercices
pour vous entraîner

APPLICATIONS



Vers l'oral

Un sujet d'annales corrigé
pour vous entraîner
dans les conditions du jour J

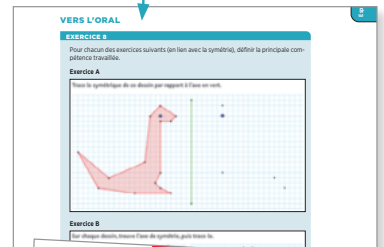


Index

Cet index cible les notions figurant dans la terminologie utilisée au cycle 4 (Bulletin officiel n° 31, 30 juillet 2020). Ces notions sont régulièrement rappelées dans les rapports de jurys comme étant incontournables. Les renvois figurant dans cet index ne sont nullement exhaustifs. Ils ne concernent que les éléments essentiels figurant dans le cours et certains conseils. Ils ne font référence ni aux applications, ni aux entraînements.

A	F
Abacus 127, 128, 230	Function 312, 313
Acquaintance 204, 295	Functionality 312, 314
Algorithm 387	Function lists 276, 313, 314
Ambiguity 230	Functions 25, 26, 27, 92
Angle alpha-beta-intensities 145, 146	Frequency 329
Angles corresponding 145, 146	
Anticatalyst 127	
	H
B	Hantzer 174, 225, 226, 227
Boule 227, 228, 235	Hemofiltrate 176, 200, 204
	I
C	Immunis reagents 68
Catalytic modifier 7	Image 201, 202, 203, 204, 312
Caution: do not proportionalize! 270, 292	Inconformity 73, 364
Cement 230	Infrared 124
Centimetre 147	Inglaid 124
Chloride 224, 225, 226, 227, 228, 249, 253	Inverse 63
Ciba 224, 225, 226, 227	
	L
D	Lactide 231
Displacement 127, 201	Longitude 232
Diagramme 28, 329	
Differential 65, 72, 331	M
Disturbance 47, 71, 72	Maldian 330
Disturbance 47, 71, 72	Maldianite 125, 173, 202
Distortion 70, 71, 72, 74, 98, 99	Meyerson 332
Dissolvability 95, 96	Mixing 69, 94
Dissolvability 95, 96	
Dissolvability 95, 96	N
Dissolvability 95, 96	Normal decimal 26
Dissolvability 95, 96	Normal error 22, 25, 68, 69, 94, 95, 96, 98, 99
	Normal 392
E	Normal error ratio 25
Efficient 228	Normal error ratio 94, 96, 97
Efficiency 73, 364, 365	Normal rationalized 25, 70
Emulsion 330	Notation significant 32

Un index pour
vous reporter facilement
aux différentes notions
traitées dans l'ouvrage



Vers l'oral

Nous vous proposons ici une table de correspondances entre les exercices "Vers l'oral" présents dans cet ouvrage et les sujets corrigés présents dans l'ouvrage *Léon : le manuel complet pour réussir l'oral* dirigé par Marc Louison et coordonné par Franky Bianco, paru aux éditions Vuibert.

[illegible]

Une table de correspondances entre les chapitres traités dans ce manuel et les sujets corrigés dans le manuel *Leçon* des éditions Vuibert, pour approfondir votre entraînement

QCM d'autoévaluation

Dans ce QCM, chaque question peut n'avoir aucune réponse correcte, ou une, ou deux, ou trois.

Nombres et calculs

❶ Combien de zéros y a-t-il dans l'écriture du nombre dix milliards dix millions dix ?

- ☐ a. 5 ☐ b. 8 ☐ c. 9 ☐ d. 11

❷ Le nombre 101 202 033 :

- ☐ a. ne possède aucun diviseur ☐ c. a exactement deux diviseurs
☐ b. a un seul diviseur ☐ d. a au moins trois diviseurs

❸ On considère la fraction $\frac{291}{438}$.

- ☐ a. 291 est un nombre premier.
☐ b. La fraction est irréductible.
☐ c. La fraction est l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal.
☐ d. La fraction est l'écriture d'un nombre irrationnel.

❹ La fraction irréductible égale à $\frac{882}{1134}$ est :

- ☐ a. $\frac{7}{9}$ ☐ b. $\frac{14}{9}$ ☐ c. $\frac{63}{81}$ ☐ d. $\frac{441}{567}$

❺ L'écriture en notation scientifique du nombre 2 310 000 000 est :

- ☐ a. 231×10^7 ☐ b. $2,31 \times 10^9$ ☐ c. $0,231 \times 10^{10}$ ☐ d. $2\,310 \times 10^6$

❻ Le carré du nombre $13 + \frac{4}{10}$ a pour partie décimale :

- ☐ a. $\frac{5}{10}$ ☐ b. $\frac{16}{100}$ ☐ c. $\frac{56}{100}$ ☐ d. 179,5

❼ La somme des carrés de deux impairs consécutifs :

- ☐ a. est un nombre impair ☐ c. peut se terminer par 4
☐ b. est un nombre pair ☐ d. est divisible par 8

❽ On donne n , nombre entier, et on considère les propositions suivantes :

P1 : $2n$ peut être un nombre premier.

P2 : $n + 1$ est toujours un nombre premier.

P3 : n^2 n'est jamais un nombre premier.

P4 : $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ n'est jamais un nombre premier.

P5 : $(2n + 1)^2$ peut être un nombre premier.

Combien y a-t-il de propositions vraies ?

- ☐ a. 0 ☐ b. 2 ☐ c. 3 ☐ d. 4

9 On considère les expressions suivantes :

$$A = x^2 - 64 ; B = 9x^2 + 16 ; C = 5x^2 - 9 ; D = -25x^2 + 169 ; E = 4x^4 - 49 ; F = 2x^2 - 7$$

Combien d'expressions peut-on factoriser ?

☐ a. 2

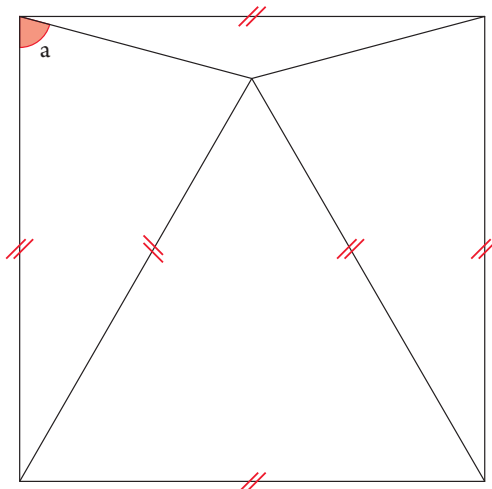
☐ b. 3

☐ c. 4

☐ d. 5

Espace et géométrie

10



Dans ce carré, l'angle $\widehat{a}$ mesure :

☐ a. 72°

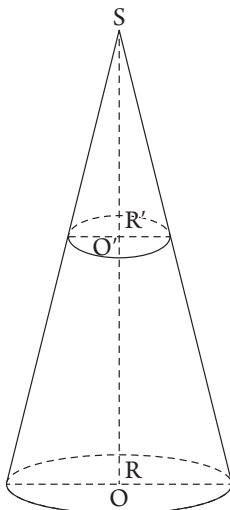
☐ b. 75°

☐ c. 70°

☐ d. 80°

11 Dans le dessin ci-dessous, les bases des deux cônes sont parallèles. On donne :

$$SO' = 18 \text{ cm}, SO = 27 \text{ cm}.$$



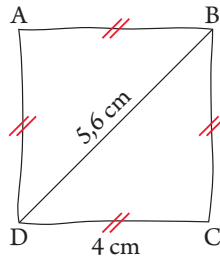
☐ a. Le coefficient d'agrandissement pour passer du petit cône au grand cône est 1,5.

☐ b. Le volume du grand cône vaut 3,375 fois le volume du petit cône.

☐ c. Le volume du grand cône vaut 1,125 fois le volume du petit cône.

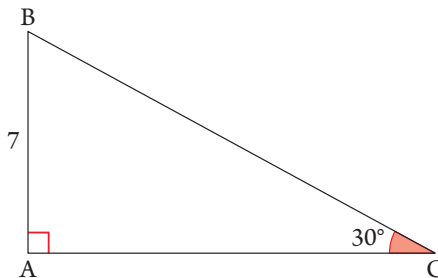
☐ d. $R = R' + 9$

- 12 On considère le quadrilatère représenté à main levée ci-dessous :



- ☐ a. ABCD est un losange.
 ☐ c. $(AC) \perp (BD)$
- ☐ b. ABCD est un parallélogramme.
 ☐ d. ABCD est un carré.

13



- ☐ a. $BC = 7 \sin 30^\circ$
☐ c. $\frac{7}{\sin 30^\circ}$
- ☐ b. $BC = \frac{\tan 30^\circ}{7}$
☐ d. $BC = 7 \tan 30^\circ$

- 14 On veut construire des rectangles dont les diagonales mesurent 4 cm.

- ☐ a. Tous les rectangles obtenus sont homothétiques.
 ☐ b. Un des rectangles obtenu peut être un carré.
 ☐ c. Un des rectangles obtenu peut être un losange.
 ☐ d. Tous les rectangles ont la même aire.

- 15 La section d'un cylindre de révolution de 4 cm de diamètre et de 10 cm de hauteur par un plan parallèle à son axe peut être :

- ☐ a. un rectangle de 10 cm sur 3 cm.
 ☐ b. un rectangle de 9 cm sur 5 cm.
 ☐ c. un rectangle de 10 cm sur 4 cm.
 ☐ d. un rectangle de 8 cm sur 2 cm.

- 16 Parmi les propositions suivantes concernant le repérage sur la Terre, combien y en a-t-il de vraies ?

- P1 : Tous les parallèles ont la même longueur.
- P2 : Tous les méridiens ont la même longueur.
- P3 : Un parallèle est un cercle.
- P4 : Un méridien est un cercle.

- ☐ a. 1
 ☐ b. 2
 ☐ c. 3
 ☐ d. 4

Grandeurs et mesures

17 Le rayon du Soleil vaut environ 100 fois le rayon de la Terre. Alors, le volume du Soleil vaut environ :

- ☐ a. 1 000 fois le volume de la Terre. ☐ c. 1 000 000 le volume de la Terre.
☐ b. 300 fois le volume de la Terre. ☐ d. 10^9 fois le volume de la Terre.

18 On quadruple la circonférence d'un disque. L'aire de ce disque est multipliée par :

- ☐ a. 4 ☐ b. 8 ☐ c. 16 ☐ d. 4π

19 Le volume exact d'une balle de tennis de 3,3 cm de rayon est, en cm^3 :

- ☐ a. $47,916\pi$ ☐ b. $13,2\pi$ ☐ c. 47π ☐ d. 150,53255

20 Un rectangle et un carré ont le même périmètre.

- ☐ a. L'aire du carré est inférieure à l'aire du rectangle.
☐ b. L'aire du carré est supérieure à l'aire du rectangle.
☐ c. L'aire du carré est égale à l'aire du rectangle.
☐ d. L'aire du carré est parfois inférieure à l'aire du rectangle, et parfois supérieure à l'aire du rectangle.

Organisation et gestion de données, fonctions

21 Léa et Lou sont deux commerçantes. Sur un certain article, Léa applique une hausse de 10 % du prix, puis une baisse de 10 % sur le prix obtenu. Sur le même article vendu le même prix de départ, Lou applique une baisse de 10 % du prix, puis une hausse de 10 % sur le prix obtenu.

- ☐ a. L'article coûte moins cher chez Léa.
☐ b. L'article coûte moins cher chez Lou.
☐ c. L'article est au même prix chez les deux commerçantes.
☐ d. Au final, l'article n'a pas changé de prix.

22 Une hausse de 25 % revient à appliquer :

- ☐ a. la fonction $x \mapsto 0,25x$ ☐ c. la fonction $x \mapsto 1 + 0,25x$
☐ b. la fonction $x \mapsto 1,25x$ ☐ d. la fonction $x \mapsto \frac{125}{100}x$

23 La fonction f est définie par $x \mapsto -\frac{1}{3}x + 5$.

- ☐ a. f est une fonction affine. ☐ c. f est une droite.
☐ b. f est une fonction linéaire. ☐ d. $\sqrt{2}$ n'a pas d'antécédent par f .

24 Lors du tirage au sort de 3 cartes, on sait que la carte A a 2 fois plus de chances d'être tirée que la carte B, et que la carte B a 3 fois plus de chances d'être tirée que la carte C. Quelle est la probabilité pour chacune des cartes d'être tirée ?

- ☐ a. 0,6 ; 0,3 ; 0,1 ☐ b. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$
☐ c. On ne pourra jamais tirer C.
☐ d. Il manque une donnée pour résoudre le problème.

25 En mathématiques, Louis a 12 pour note médiane. Cela signifie que :

- ☐ a. au moins la moitié de ses notes sont inférieures ou égales à 12.
☐ b. il a autant de notes inférieures ou égales à 12 que de notes supérieures ou égales à 12.
☐ c. une note sur deux est égale à 12.
☐ d. s'il avait toujours eu les mêmes notes, celles-ci auraient toutes été égales à 12.

Problèmes

26 Dans une boisson A, il y a quatre parts de chocolat pour sept parts de lait. Dans une boisson B, il y a six parts de chocolat pour neuf parts de lait.

- ☐ a. A est plus chocolatée que B.
- ☐ b. B est plus chocolatée que A.
- ☐ c. A et B sont autant chocolatées.
- ☐ d. Il faut rajouter une part et demie de lait à la boisson B pour qu'elle soit aussi chocolatée que la boisson A.

27 Charlie a obtenu 15 à son dernier devoir, sa moyenne passe alors de 11 à 12. Quelle note doit-il obtenir à son prochain devoir pour que sa moyenne passe de 12 à 13 ?

- ☐ a. 20
- ☐ b. 19
- ☐ c. 17
- ☐ d. Ce problème n'a pas de solution, car on ne connaît pas le nombre de notes de Charlie.

28 Pour aller de la ville A à la ville B, un automobiliste roule à une vitesse moyenne de 80 km/h, et au retour, par la même route, il roule à une vitesse moyenne de 120 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours ?

- ☐ a. 96 km/h
- ☐ b. 100 km/h
- ☐ c. Environ 97,9 km/h
- ☐ d. Il faut connaître la distance entre les deux villes pour calculer cette vitesse moyenne.

29 Aux États-Unis, la température se mesure en degrés Fahrenheit (en °F). En France, elle se mesure en degrés Celsius (en °C). Pour faire les conversions d'une unité à l'autre, on a utilisé un tableur. Voici une copie de l'écran obtenu ci-dessous :

	A	B
1	Conversions	
	Températures	Températures
2	en °C	en °F
3	- 5	23
4	0	32
5	5	41
6	10	50
7	15	59
8	20	68
9	25	77

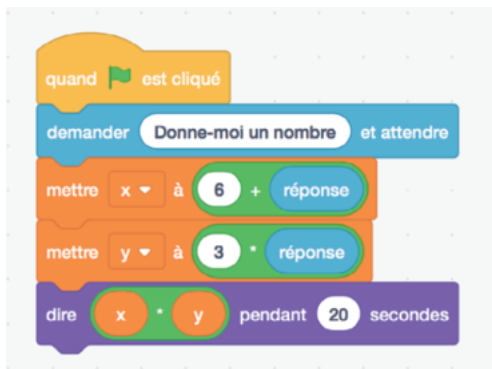
Pour convertir la température de °C en °F, il faut multiplier la température en °C par 1,8 puis ajouter 32. On a écrit une formule en B3 puis on l'a recopiée vers le bas.

Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B3 ?

- ☐ a. $1,8*A3+32$
- ☐ b. $=1,8*5+32$
- ☐ c. $=1,8*B3+32$
- ☐ d. $=1,8*A3+32$

Algorithmique et programmation

30 Le programme ci-dessous a été écrit avec le logiciel Scratch :



- ☐ a. Si on rentre le nombre 5, le lutin va dire 175 pendant 20 s.
- ☐ b. Si on rentre le nombre $2 + \frac{7}{10}$, le lutin va dire $70 + \frac{47}{100}$ pendant 20 s.
- ☐ c. Si le lutin dit 28, c'est que l'on a rentré le nombre 1.
- ☐ d. Il existe trois nombres distincts que l'on peut rentrer pour lesquels le lutin va dire 0 pendant 20 s.

CORRIGÉS

1 b. Le nombre s'écrit 10 010 000 010.

→ Chapitre 2
p. 42-44

2 d. La somme des chiffres du nombre est 12, donc ce nombre est divisible par 3. Comme tout nombre différent de 0 est divisible par 1 et par lui-même, ce nombre a au moins 3 diviseurs.

→ Chapitre 4
p. 95

3 **Aucune bonne réponse.** 291 est divisible par 3, donc il n'est pas premier. La fraction se réduit à $\frac{97}{146}$. 146 n'est pas le produit d'une puissance de 2 par une puissance 5, donc la fraction n'est pas l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal. De plus, par définition, toute fraction est l'écriture d'un nombre rationnel.

→ Chapitres
1 p. 26
et 4 p. 95

4 a. $\frac{882}{1134} = \frac{2 \times 3^2 \times 7^2}{2 \times 3^4 \times 7} = \frac{7}{9}$

→ Chapitre 4
p. 98

5 b. Par définition.

→ Chapitre 1
p. 30

6 c. $13 + \frac{4}{10} = 13,4$; $13,4^2 = 179,56 = 179 + \frac{56}{100}$

→ Chapitre 1
p. 28

7 b. et c. Cette somme s'écrit $(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 = 8n^2 + 2$, donc ce nombre est pair. Il peut se terminer par 4, par exemple $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$.

→ Chapitre 4
p. 95

8 c. Pour $n = 1$, $2n = 2$ qui est un nombre premier. Pour $n = 3$, $n + 1 = 4$, qui n'est pas un nombre premier. Pour $n \neq 1$, $n^2 = n \times n$ ne peut pas être premier. $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 4n$ qui ne peut pas être un nombre premier. $(2n + 1)^2 = (2n + 1)(2n + 1)$ qui ne peut pas être un nombre premier.

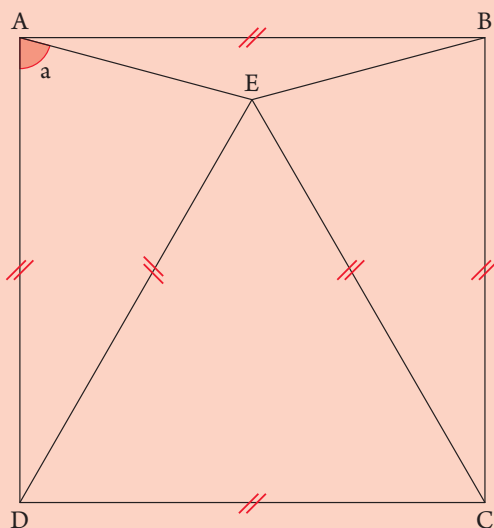
→ Chapitre 4
p. 96

9 d. Seule, l'expression B est non factorisable. Pour les autres expressions, par exemple, on a :

$$D = (13 - 5x)(13 + 5x) ; F = (x\sqrt{2} - \sqrt{7})(x\sqrt{2} + \sqrt{7})$$

→ Chapitre 3
p. 68 et p. 72

10 b. On a :



DEC est un triangle équilatéral, donc $\widehat{EDC} = 60^\circ$.

Par conséquent, $\widehat{ADE} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Le triangle ADE est isocèle en A, donc $\widehat{a} = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$.

→ Chapitre 6
p. 146-147

11 a. et b. Le coefficient d'agrandissement est $\frac{27}{18} = \frac{3}{2} = 1,5$.

Donc $V(\text{grand cône}) = 1,5^3 \times V(\text{petit cône}) = 3,375 V(\text{petit cône})$

$$\frac{R}{R'} = \frac{SO}{SO'} = 1,5, \text{ donc } R = 1,5 R'.$$

Si on avait $R = R' + 9$, alors on aurait $R' + 9 = 1,5 R'$, soit $8,5 R' = -9$, ce qui est impossible.

→ Chapitres
8 p. 192
et 11 p. 253

12 a., b. et c. $AB = BC = CD = DA$, donc ABCD est un losange. Tout losange est un parallélogramme. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, donc $(AC) \perp (BD)$. $4^2 + 4^2 = 32$ et $5,6^2 = 31,36$, donc on ne peut pas appliquer le théorème de Pythagore, $\widehat{DCB}$ n'est pas un angle droit, et ABCD n'est pas un carré.

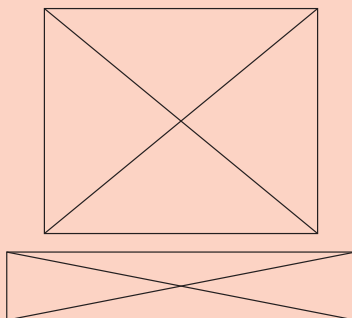
→ Chapitre 7
p. 168
et suivantes

13 c. $\sin 30^\circ = \frac{7}{BC}$, donc $BC = \frac{7}{\sin 30^\circ}$.

$$\tan 30^\circ = \frac{7}{AC} \text{ donc c. est fausse.}$$

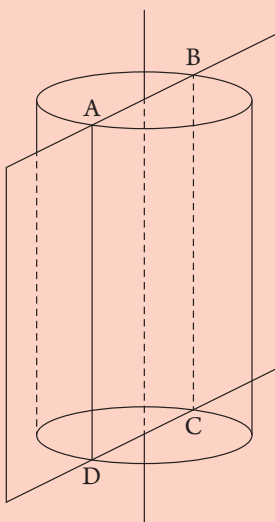
→ Chapitre 6
p. 147

- 14 **b.** et **c.** Par exemple, ces deux rectangles ont des diagonales de 4 cm et ne sont pas homothétiques :



De plus, ces deux rectangles n'ont pas la même aire.

- 15 **a.** et **c.** La hauteur du rectangle est 10 cm, sa plus grande largeur est 4 cm :



- 16 **b.** Les propositions P2 et P3 sont vraies par définition.

- 17 **c.** $R(\text{Soleil}) = 100 R(\text{Terre})$, donc $V(\text{Soleil}) = \frac{4}{3} \pi (100R)^3 = \frac{4}{3} \pi \times 1\,000\,000 R^3$.

- 18 **c.** La circonférence d'un disque de rayon R est $C_1 = 2\pi R$. La nouvelle circonférence est $C_2 = 4 \times 2\pi R = 2 \times \pi \times 4R$, c'est-à-dire que le rayon a été multiplié par 4. L'aire initiale, égale à $A_1 = \pi R^2$ devient : $A_2 = \pi \times (4R)^2 = 16 \times \pi R^2 = 16 A_1$.

- 19 **a.** $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \times 3,3^3 = 4 \times \pi \times 1,1 \times 3,3^2 = 47,916 \pi \text{ cm}^3$

→ Chapitre 7
p. 169

→ Chapitre 10
p. 226

→ Chapitre 10
p. 231

→ Chapitre 12
p. 271

→ Chapitre 12
p. 271

→ Chapitre 11
p. 253

20 b. Une recherche sur un cas particulier, par exemple un périmètre de 32, donne la réponse :

L	8	9	10	11	12	13
I	8	7	6	5	4	3
Aire	64	63	60	55	48	39

→ Chapitre 11
p. 252

21 c. Dans les deux cas, le prix final vaut $1,1 \times 0,9 = 0,99$ fois le prix initial.

→ Chapitre 13
p. 293

22 b. et d. Augmenter une quantité de 25 % revient à la multiplier par $1 + 25 \% = 1,25 = \frac{125}{100}$.

→ Chapitre 13
p. 293

23 a. f est affine par définition d'une fonction affine qui est du type : $f \rightarrow ax + b$. Les autres réponses sont fausses. Pour b , f n'est pas linéaire car une fonction linéaire est du type $x \rightarrow ax$. On peut remarquer que toute fonction linéaire est affine (avec $b = 0$), mais la réciproque est fausse. Pour c , c'est la représentation graphique de f qui est une droite, et non pas f qui, elle, est une fonction. Enfin pour d , chercher l'antécédent de $\sqrt{2}$ par f , c'est résoudre l'équation $-\frac{1}{3}x + 5 = \sqrt{2}$, soit : $\frac{1}{3}x = 5 - \sqrt{2}$, c'est-à-dire $x = 15 - 3\sqrt{2}$.

→ Chapitre 14
p. 312

24 a. D'après l'énoncé, $p(A) = 2 p(B)$ et $p(B) = 3 p(C)$. Donc $p(A) = 6 p(C)$. On sait que $p(A) + p(B) + p(C) = 1$, soit $10 p(C) = 1$, d'où $p(C) = \frac{1}{10}$, $p(B) = \frac{3}{10}$ et $p(A) = \frac{6}{10}$.

→ Chapitre 16
p. 350

25 a. et b. Par définition.

→ Chapitre 15
p. 331-332

26 b. et d. La proportion de chocolat dans la boisson A est $\frac{4}{7}$ (environ 0,57), et elle est de $\frac{6}{9}$ (environ 0,66) dans la boisson B. Soit x la quantité de lait que l'on ajoute à la boisson B pour qu'elle soit aussi chocolatée que la boisson A. Alors :

$$\frac{4}{7} = \frac{6}{9+x} \text{ soit } 36 + 4x = 42, \text{ d'où } 4x = 6 \text{ et } x = 1,5.$$

→ Chapitre 12
p. 270

27 c. Au départ, la moyenne de Charlie est 11. On appelle S la somme des notes de Charlie et N le nombre de ces notes. Alors $\frac{S}{N} = 11$, soit $S = 11 N$. En obtenant 15, la moyenne devient $\frac{S+15}{N+1} = 12$, soit $S + 15 = 12 N + 12$, c'est-à-dire : $11 N + 15 = 12 N + 12$. Finalement, $N = 3$ et $N + 1 = 4$ et $S + 15 = 48$. Soit n la note que Charlie doit obtenir pour que sa moyenne devienne 13, alors $\frac{48+n}{5} = 13$, soit $48 + n = 65$ et $n = 17$.

→ Chapitre 15
p. 332

28 a. $\frac{AB}{t_1} = 80$ et $\frac{AB}{t_2} = 120$, soit $t_1 = \frac{AB}{80}$ et $t_2 = \frac{AB}{120}$

La vitesse moyenne V sur l'ensemble du parcours est $V = \frac{2AB}{t_1 + t_2} = \frac{2AB}{\frac{AB}{80} + \frac{AB}{120}}$

$$V = \frac{2AB}{\frac{5AB}{240}}. \text{ Finalement, } V = \frac{2AB \times 240}{5AB} = 96.$$

→ Chapitre 13
p. 296

29 d. La formule d est correcte.

→ Chapitre 18
p. 387

30 b. Pour 5, le programme calcule $(6 + 5) \times 3 \times 5 = 11 \times 15$, le lutin dit 165.

Pour le nombre $2 + \frac{7}{10} = 2,7$ le programme calcule $(6 + 2,7) \times 3 \times 2,7 = 8,7 \times 8,1$, le lutin dit $70 + \frac{47}{100}$.

Si l'on entre le nombre 1, le programme calcule : $7 \times 3 = 21$

La formule du calcul du programme est : $(6 + n) \times 3n$. L'équation $(6 + n) \times 3n = 0$ n'admet que 2 solutions, qui sont -6 et 0 .

→ Chapitre 18 p. 390 et suivantes

Calculez votre score et suivez nos conseils :

Nombres et calculs	... / 9
Espace et géométrie	... / 7
Grandeurs et mesures	... / 4
Organisation et gestion de données, fonctions	... / 5
Problèmes	... / 4
Algorithmique et programmation	... / 1

À partir de ce score, déterminez un ordre de lecture des chapitres : vous pouvez commencer par les domaines dans lesquels vous vous sentez le plus à l'aise, ou au contraire travailler en priorité vos difficultés.

Au début de chaque chapitre, commencez par effectuer l'autoévaluation, puis prenez connaissance des conseils. Ces derniers pointent la plupart des difficultés rencontrées par les candidats et les notions à bien maîtriser pour le concours. Au regard de celles-ci, par le biais des renvois proposés dans le corrigé, consultez les éléments de cours correspondants puis faites les exercices suggérés.

Table des savoir-faire à maîtriser

De nombreux savoir-faire nécessitent l'utilisation directe d'une définition (par exemple démontrer le fait qu'un nombre est décimal) ou d'une propriété (par exemple démontrer qu'un triangle est isocèle ou qu'un triangle est rectangle). Ces savoir-faire ne figurent pas dans le tableau suivant qui ne recense que les cas les plus difficiles, c'est-à-dire qui nécessitent un choix de méthode ou qui sont de faux amis, comme les calculs de vitesse moyenne ou les calculs sur les pourcentages successifs.

Savoir-Faire	Outils présents dans l'ouvrage
Calculer avec des exposants	Utilisation de la définition $a^n = a \times a \times \dots \times a$ (n facteurs égaux à a) plutôt que des formules de sommes ou de produits, p. 68
Calculer la longueur d'un segment	Axiome 3 des distances, p. 124 Théorème de Pythagore, p. 191 Théorème de Thalès, p. 192 Cosinus, sinus, tangente, p. 147 Donnée d'une aire et d'une dimension, p. 252
Montrer que deux droites sont parallèles	Angles correspondants, p. 145 Angles alternes-internes, p. 145 Côtés opposés d'un parallélogramme (ou rectangle, losange, carré), p. 168 Réciproque du théorème de Thalès, p. 192
Montrer que deux droites sont perpendiculaires	Médiatrice, p. 125 Réciproque du théorème de Pythagore, p. 191 Côtés consécutifs d'un rectangle ou d'un carré, p. 169
Montrer que trois points sont alignés	Axiome 3 des distances, p. 124 Notion de milieu, p. 125 Droites parallèles confondues, p. 122 $\widehat{ABC} = 180^\circ$, p. 144
Démontrer la nature d'un quadrilatère	Propriété caractéristique des côtés, p. 167-168 Propriété caractéristique des diagonales, p. 168-169 Autre propriété, p. 169-170
Calculer un angle	Lignes trigonométriques dans le triangle rectangle, p. 147 Somme des angles d'un triangle, p. 146 Angles opposés par le sommet, p. 145 Angles correspondants ou alternes-internes déterminés par deux droites parallèles, p. 146
Lire des données sur un graphique	Distinction abscisse-ordonnée, p. 128 Associer données mathématiques et données concrètes du problème, p. 313
Calculer avec des pourcentages	Définition, p. 292 Représentation par schéma, p. 292-294 Utilisation du coefficient multiplicateur, p. 293
Calculer une vitesse moyenne	Utilisation de la définition $v = \frac{d}{t}$ et calculs séparés de d et t , p. 296

PARTIE 1

Nombres et calculs

1	Les différents types de nombres	22
2	Numération de position	38
3	Nombres et opérations	62
4	Arithmétique	91

1

Les différents types de nombres

Savoir-faire à maîtriser pour le concours :

- Connaître les différents ensembles des nombres réels (entiers naturels ; entiers relatifs ; nombres rationnels dont les nombres décimaux ; nombres irrationnels).
- Définir et identifier un nombre décimal ; démontrer si un nombre est décimal ou pas.
- Utiliser les différentes formes d'écriture des nombres, en particulier donner l'écriture scientifique d'un nombre.
- Simplifier des fractions en décomposant leurs termes en produits de facteurs premiers ou non et en trouvant des facteurs communs à ces deux termes, premiers ou non.

AUTOÉVALUATION

Pour chaque question, il peut y avoir plusieurs bonnes réponses.

① $\frac{5}{7}$ est un nombre :

- ☐ a. entier ☐ b. décimal
☐ c. rationnel non décimal ☐ d. irrationnel

② 273 est un nombre :

- ☐ a. décimal ☐ b. rationnel
☐ c. irrationnel ☐ d. réel

③ Parmi les nombres suivants :

$0,33$; $\frac{1}{4}$; 3 ; 3,14 ; $\frac{22}{7}$; $\frac{427}{10}$; -4 ; $\frac{40}{10}$; $\frac{3}{5}$; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}$; π ; $\frac{117}{125}$; $\frac{117}{3}$; $\frac{145}{7}$

Il y a :

- ☐ a. 3 nombres décimaux
☐ b. 8 nombres décimaux
☐ c. 10 nombres décimaux
☐ d. 11 nombres décimaux

④ Voici 5 égalités : $\frac{1}{20} = 0,50$; $\frac{1}{5} = 0,2$; $\frac{1}{3} = 0,333$; $\sqrt{2} = 1,414$; $\pi = 3,14$.

Parmi ces égalités :

- ☐ a. une seule est vraie
☐ b. deux sont vraies
☐ c. quatre sont vraies
☐ d. cinq sont vraies

5 Combien y a-t-il de nombres décimaux avec 1 chiffre après la virgule et supérieurs à 2,263 ?

- ☐ a. 9 ☐ b. 10
☐ c. une infinité ☐ d. 8

6 Combien y a-t-il de nombres décimaux compris entre 1,2 et 1,3 ?

- ☐ a. aucun ☐ b. 9
☐ c. 10 ☐ d. une infinité

7 Je suis un nombre entier. Mon nombre de milliers est 45 et mon chiffre des dizaines est 4. Qui suis-je ?

- ☐ a. 4 534 ☐ b. 45 041
☐ c. 4 544 ☐ d. 454 454

8 Quelle est la notation scientifique du nombre 475,02 ?

- ☐ a. $0,47502 \times 10^3$
☐ b. $47,502 \times 10^{-2}$
☐ c. $4,7502 \times 10^2$
☐ d. $47\,502 \times 10^{-2}$

CONSEILS

Certaines questions exigent une bonne connaissance des relations entre les différents ensembles de nombres, ainsi que des propriétés des nombres décimaux. Tous les éléments correspondants figurent dans le cours.

En vue du concours, les différentes définitions d'un nombre décimal exigent d'être bien connues. Rappelons qu'un nombre décimal n'est pas défini comme un nombre écrit avec une virgule (voir le point 7 du cours).

CORRIGÉS

1 c. Reportez-vous à la définition dans le cours point 3.

→ Cours p. 25

2 a., b. et d. Reportez-vous aux propriétés dans le cours, notamment la représentation des nombres sur un diagramme de Venn. Ainsi, tout nombre entier est aussi décimal, rationnel et réel.

→ Cours p. 26-28

3 c. $\frac{22}{7}$; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}$; π et $\frac{145}{7}$ ne sont pas décimaux.

Le dénominateur des trois fractions n'est pas le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5, donc le nombre est rationnel non décimal. $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels, on ne peut pas les écrire sous la forme d'une fraction à termes entiers.

→ Cours p. 26

4 a. Les trois dernières égalités sont fausses car il s'agit de valeurs approchées des nombres. Et la première est fausse aussi.

→ Cours p. 28

5 c. Par exemple : 2,3 ; 2,4 ; ... ; 3,2 ; 15,1 ; ...

→ Cours p. 28

6 d. Entre deux nombres décimaux, on peut toujours placer une infinité de nombres décimaux.

→ Cours p. 26

7 b.

→ Cours p. 25

8 c.

→ Cours p. 30

COURS

Sommaire

1. Nombres entiers naturels

2. Nombres entiers relatifs

3. Nombres rationnels

4. Nombres décimaux
5. Nombres irrationnels

6. Représentations des ensembles de nombres

7. Une autre écriture des nombres

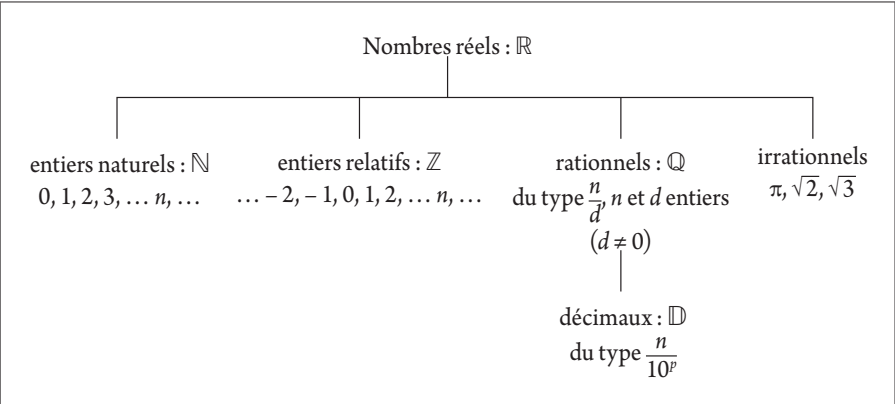
8. Écriture scientifique d'un nombre

Parmi les nombres et ensembles de nombres, quatre sont fondamentaux :

- les nombres **entiers naturels**, dont l'ensemble est noté **N** ou $\mathbb{N}$;
- les nombres **entiers relatifs**, dont l'ensemble est noté **Z** ou $\mathbb{Z}$;
- les nombres **rationnels**, dont l'ensemble est noté **Q** ou $\mathbb{Q}$ (et parmi ceux-ci, les nombres **décimaux**, dont l'ensemble est noté **D** ou $\mathbb{D}$, qui sont donc des nombres rationnels particuliers) ;
- les nombres **irrationnels**, dont l'ensemble n'a pas de notation particulière.

Tous ces nombres forment une grande « famille » appelée famille ou ensemble des nombres **réels**, noté **R** ou $\mathbb{R}$.

Famille des nombres réels



1 Nombres entiers naturels

A. Définition ordinale (liée à l'ordre)

L'ensemble des nombres entiers naturels se construit par les axiomes de G. Peano :

- 0 est un nombre entier naturel.
- Tout entier naturel a un successeur.
- 0 n'est le successeur d'aucun entier naturel.
- Deux nombres entiers naturels qui ont le même successeur sont égaux.
- Si une partie de $\mathbb{N}$ contient 0 ainsi que le successeur de chacun de ses éléments, alors cette partie est égale à $\mathbb{N}$.

B. Définition cardinale (liée à la quantité)

Pour B. Russell, un nombre entier est le nombre d'éléments d'une collection d'objets non fractionnables.

EXEMPLES

- 0, 1, 2, 3, ... 47, ... 158 ... sont des nombres entiers naturels.
- Si l'on considère le nombre entier 3, on dit « le troisième » dans la définition de Peano, et « trois » dans la définition de Russel.

Pour désigner un nombre entier quelconque, on utilise généralement la lettre n .

L'entier qui précède n (pour n différent de 0) est $n - 1$, et le successeur du nombre n est le nombre $n + 1$.

2 Nombres entiers relatifs

Il suffit de savoir qu'un nombre entier relatif est un nombre entier dont l'écriture est précédée du signe « - » et le nombre est appelé **nombre négatif** ou du signe « + » et le nombre est appelé **nombre positif**.

EXEMPLES

- 6 ; + 15 ; + 568 ; - 219 sont des nombres entiers relatifs.
- Le signe « - » a un aspect concret : - 5 peut par exemple signifier « 5 degrés au-dessous de 0 » ou « 5 à gauche de 0 sur un axe horizontal ».
- Le signe « - » signifie aussi « opposé de ». Par exemple, - 5 est l'opposé du nombre 5.
- En tenant compte de la remarque précédente, - n signifie « opposé de n », et ainsi - n peut être un nombre positif. Ainsi, si $n = - 5$, alors - $n = 5$ qui est un nombre positif.

► **Propriété** : Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif. Ainsi, si a est un nombre entier naturel, on peut écrire $a = + a$.

EXEMPLE

On peut écrire + 4 ou 4 ; + 68 ou 68...

3 Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une **fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers** (cet entier étant non nul pour le dénominateur).

EXEMPLES

$\frac{3}{4}$, $\frac{47}{3}$ et $\frac{3\,658}{44\,259}$ sont des nombres rationnels.

► **Propriété** : Tout nombre entier est un nombre rationnel : ainsi, si a est un nombre entier, on peut écrire $a = \frac{a}{1}$.

EXEMPLE

$$5 = \frac{5}{1}$$

Parmi les nombres rationnels, on distingue certains nombres appelés **nombres décimaux**.

4 Nombres décimaux

A. Définition

- Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une **fraction à termes entiers dont le dénominateur est une puissance de 10**.
- Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible à termes entiers dont **le dénominateur est le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5**.

→ Exercice 5 p. 32

Les deux définitions précédentes sont équivalentes, et par conséquent, un nombre est décimal, si et seulement si, il peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$\frac{a}{10^n} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{5^p} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2^k} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2^k \times 5^p}.$$

EXEMPLES

- $\frac{7}{10}$, $\frac{2\,847}{100}$, $\frac{31}{1\,000\,000}$ sont des nombres décimaux, leur dénominateur est une puissance de 10. ($10 = 10^1$, $100 = 10^2$ et $1\,000\,000 = 10^6$). Ces trois fractions sont irréductibles.
- $\frac{21}{75}$ est un nombre décimal. *A priori*, comme $75 = 3 \times 5^2$, on pourrait penser que le nombre est rationnel non décimal par la présence du facteur 3, mais on peut simplifier l'écriture de la fraction, on obtient : $\frac{21}{75} = \frac{7}{25}$, et $25 = 5^2$ est une puissance de 5.

B. Propriété

Tout nombre entier est un nombre décimal, ainsi si a est un nombre entier, on peut écrire :

$$a = \frac{10a}{10}, \text{ par exemple } 9 = \frac{90}{10}.$$

APPLICATION 1

Démontrer que les nombres suivants sont décimaux.

$$A = \frac{7}{64} \quad B = \frac{21}{625} \quad C = \frac{27}{250} \quad D = \frac{39}{6} \quad E = \frac{35}{7}.$$

→ Corrigé p. 33

APPLICATION 2

Donner deux nombres décimaux pouvant s'intercaler entre 1,102 et 1,103.

→ Corrigé p. 33

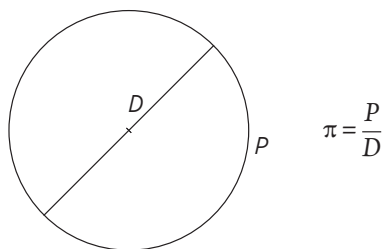
5 Nombres irrationnels

Un nombre irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel, et que l'on ne peut donc pas écrire sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers.

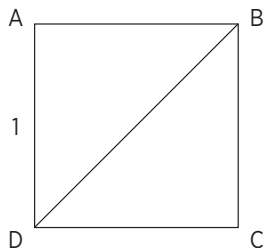
Il n'y a pas de notation pour l'ensemble des nombres irrationnels.

EXEMPLES

- π est un nombre irrationnel. Sa première définition est d'être le rapport entre le périmètre P d'un cercle et son diamètre : $\pi = \frac{P}{D}$ ou encore $\pi = \frac{P}{2R}$. (Attention, avec cette écriture, $\frac{P}{2R}$ est une fraction mais dont les deux termes ne peuvent être simultanément entiers.)



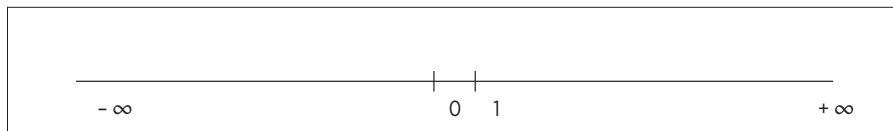
- $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Ce nombre est défini comme la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1.



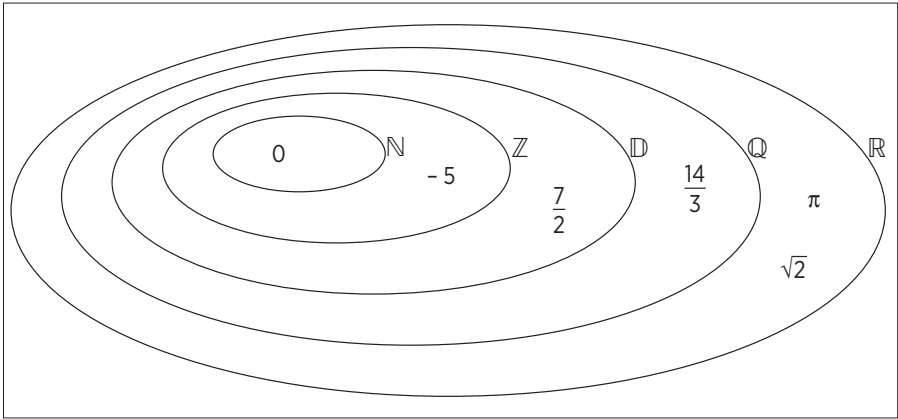
Si $AB = 1$, alors $BD = \sqrt{2}$.

6 Représentations des ensembles de nombres

Représentation 1 : Droite numérique



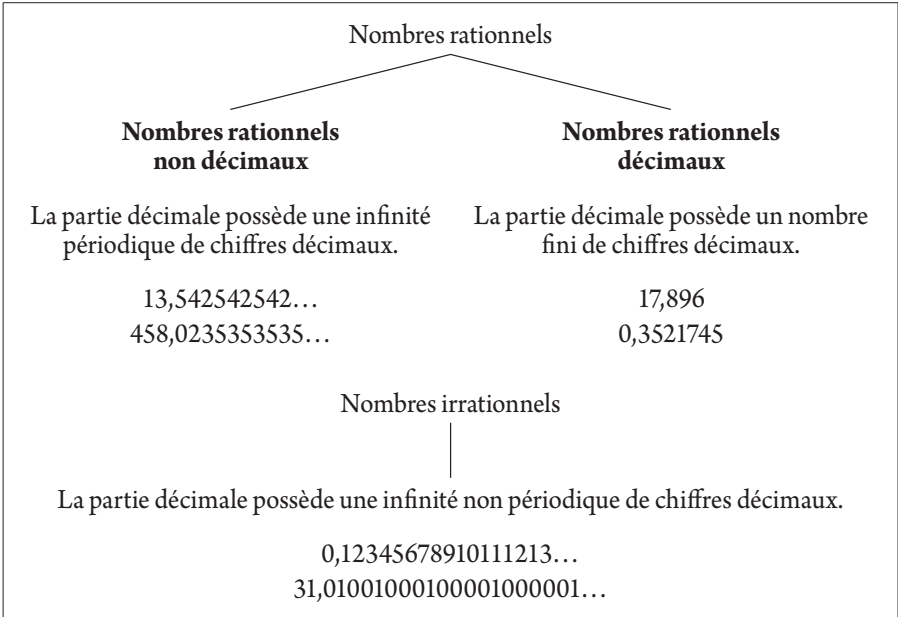
Représentation 2 : Diagramme de Venn



7 Une autre écriture des nombres

Il existe une autre façon d’écrire les différents types de nombres précédents : l’écriture utilisant un nombre écrit à l’aide d’une virgule.

Écriture des différentes familles de nombres



ZOOM

Infinité périodique signifie qu’il y a répétition infinie d’une série de chiffres. Ainsi, dans le nombre 13,542542542... la suite « 542 » se répète indéfiniment, et dans le nombre 458,0235353535..., la suite « 35 » se répète indéfiniment.

EXEMPLES

- $\frac{7}{25}$ est un nombre (rationnel) décimal que l'on peut écrire sous la forme 0,28.
- $\frac{7}{3}$ est un nombre rationnel non décimal que l'on peut écrire sous la forme 2,333333...
- $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, dont une valeur approchée est 1,4142135623. (Il est impossible de connaître la valeur exacte de $\sqrt{2}$, et, plus généralement, il est impossible de connaître la valeur exacte d'un nombre irrationnel. En revanche, il est théoriquement possible de « s'approcher » aussi près que l'on veut d'un nombre irrationnel à l'aide d'un nombre décimal.)

APPLICATION 3

Pourquoi l'écriture à l'aide d'une virgule d'un nombre rationnel non décimal comporte-t-elle une infinité périodique de chiffres ?

→ Corrigé p. 33

ZOOM

Par ce qui précède, on comprend qu'un nombre décimal ne se définit pas simplement comme un « nombre écrit avec une virgule ». Ainsi, 5 n'est pas écrit à l'aide d'une virgule, or 5 est décimal ($5 = 5,0$). De même, 0,538461538461... est écrit à l'aide d'une virgule et, pourtant, ce n'est pas un nombre décimal.

La virgule dans l'écriture d'un nombre marque la place de l'unité.

Ainsi, dans le nombre 17,965 le chiffre des unités est 7. Ce qui permet alors de donner du sens à chacun des autres chiffres.

ZOOM

Il ne faut surtout pas dire que la virgule sépare la partie entière de la partie décimale : d'une part, parce que cela ne correspond pas du tout à la fonction de cette virgule, et, d'autre part, cela renforce la fausse idée des élèves qu'un nombre décimal consiste en deux nombres entiers séparés par une virgule.

APPLICATION 4

Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un nombre écrit à l'aide d'une virgule. Le problème qui se pose est de retrouver les deux termes de la fraction définissant ce nombre lorsque l'on connaît uniquement son écriture à l'aide d'une virgule. Résoudre ce problème pour les nombres suivants.

- 1 52,44444444...
- 2 2,548548548...
- 3 13,5271414141...

→ Corrigé p. 33

Il existe un **cas particulier important**. Les nombres écrits sous la forme $a,99999999...$, a nombre entier naturel, sont égaux à $a + 1$.

En effet :

Soit $n = a,99999999\dots$

Donc $n = a + 0,99999999\dots$

Alors $10n = 10a + 9,99999999\dots$

Par conséquent $10n - n = 10a + 9,99999999\dots - a - 0,99999999\dots$

Soit $9n = 9a + 9 = 9(a + 1)$ et donc $n = a + 1$.

APPLICATION 5

Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un nombre écrit à l'aide d'une virgule. Le problème qui se pose est de retrouver les deux termes de la fraction définissant ce nombre lorsque l'on connaît uniquement son écriture à l'aide d'une virgule. Résoudre ce problème pour les nombres suivants.

- ① Démontrer que $3,99999\dots$ est égal à 4.
- ② Démontrer que $52,4799999\dots$ est égal à 52,48.

→ Corrigé p. 33

8 Écriture scientifique d'un nombre

L'écriture scientifique (ou notation scientifique) d'un nombre est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^n$, avec $1 \leq a < 10$ et n entier relatif. On rappelle que pour n entier positif, 10^n est un 1 suivi de n zéros et pour n entier négatif, 10^n est un 1 précédé de n zéros.

EXEMPLES

$$10^7 = 10\,000\,000$$

$$10^{-4} = 0,0001$$

$$195\,698 = 1,95698 \times 10^5$$

$$0,000087 = 8,7 \times 10^{-5}$$

APPLICATION 6

- ① Écrire les nombres suivants en notation scientifique :

15 800

333,33

0,000000852

17,98

25 608 970

10,752

0,00025

- ② Donner l'écriture décimale de chacun des nombres suivants :

$$4,2 \times 10^8$$

$$6,58 \times 10^{-5}$$

$$8,956\,847 \times 10^4$$

$$1,002506 \times 10^{-4}$$

→ Corrigé p. 34

APPLICATION 7

Calculer et exprimer le résultat en écriture décimale, puis en notation scientifique :

$$A = 13 \times 10^7 \times 5 \times 10^5$$

$$C = \frac{4,2 \times 10^5}{12 \times 10^3}$$

$$B = 4,51 \times 10^3 \times 2,4 \times 10^5 \times 1,2 \times 10^{-4}$$

$$D = \frac{14,02 \times 10^{-4}}{701 \times 10^{-3}}$$

→ Corrigé p. 34

ENTRAÎNEMENTS

EXERCICE 1

 10 min.

Écrire un entier à la place du carré pour que l'écriture fractionnaire désigne :

Un entier naturel	Un décimal non entier	Un rationnel non décimal
$\frac{\blacksquare}{115}$	$\frac{\blacksquare}{115}$	$\frac{\blacksquare}{115}$
$\frac{115}{\blacksquare}$	$\frac{115}{\blacksquare}$	$\frac{115}{\blacksquare}$

→ Corrigé p. 34

EXERCICE 2

 10 min.

- 1 Trouver un nombre décimal compris entre 3,0001 et 3,01.
- 2 Trouver un nombre non décimal compris entre 3,0001 et 3,01.
- 3 Trouver une fraction qui s'intercale entre $\frac{18}{31}$ et $\frac{19}{31}$.
- 4 Trouver une fraction qui s'intercale entre $\frac{5}{7}$ et $\frac{17}{11}$.

→ Corrigé p. 34

EXERCICE 3

 25 min.

- 1 Parmi les 4 fractions suivantes, quelles sont celles qui représentent un nombre décimal ?

$$\frac{54}{1350} ; \frac{5}{100} ; \frac{17}{1024} ; \frac{50}{1275}$$

- 2 Quels sont tous les nombres entiers naturels n pour lesquels la fraction $\frac{n}{1050}$ représente :

- a. un nombre entier ? Justifier la réponse.
- b. un nombre décimal ? Justifier la réponse.
- c. un nombre rationnel non décimal ? Justifier la réponse.

- 3 Montrer que l'on peut donner, sans calcul, l'écriture à virgule du nombre $\frac{41}{333}$ à partir de l'égalité : $41 = 333 \times 0,123 + 0,041$.

- 4 Les nombres représentés par les fractions $\frac{171}{13\,888\,750}$ et $\frac{41}{3\,330\,000}$ sont-ils égaux ? Justifier la réponse.

→ Corrigé p. 35

EXERCICE 4

 25 min.

Simplifier : $\frac{42}{78}, \frac{204}{136}, \frac{4\,095}{3\,465}, \frac{4\,716}{35\,370}$.

→ Corrigé p. 35

EXERCICE 5

10 min.

On considère les deux nombres $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$.

① Sont-ils des nombres décimaux ?

Pour chacune des questions suivantes, on n'utilisera pas l'écriture à l'aide d'une virgule de chacun de ces deux nombres.

② Comparer ces deux nombres.

③ Trouver un nombre décimal strictement compris entre ces deux nombres.

④ Trouver une fraction qui ne soit pas un nombre décimal, strictement comprise entre ces deux nombres.

→ Corrigé p. 36

VERS L'ORAL

EXERCICE 6

À partir de la page de manuel suivante, répondre aux questions ci-après.

1



Entoure par 10, puis complète.



Il y a paquets de 10 pommes
et pommes isolées.

..... + +

Cela fait pommes en tout.

- ① À quel cycle d'apprentissage pourrait-on proposer cette situation ?
- ② Quel est l'objectif d'apprentissage ?
- ③ Quelle est la compétence visée ?
- ④ Quel est le prérequis à cette activité ?
- ⑤ Quel est l'attendu de fin de cycle qui correspond à cette situation d'apprentissage ?
- ⑥ Quelles seraient les stratégies possibles de résolution de ce problème ?
- ⑦ Quelle leçon peut être construite à partir de ce support ?
- ⑧ Quelle(s) remédiation(s) pourrait-on proposer à un élève qui aurait des difficultés à résoudre ce type de situation mathématique ?

→ Corrigé p. 36

CORRIGÉS

APPLICATIONS

APPLICATION 1

$64 = 2^6$ donc A est décimal, d'après la définition cardinale.
 $625 = 5^4$ donc B est décimal, d'après la définition cardinale.
 $250 = 2 \times 5^3$ donc C est décimal, d'après la définition cardinale.
 $\frac{39}{6} = \frac{13}{2}$ donc D est décimal, d'après la définition cardinale.
 $\frac{35}{7} = 5$ donc E est décimal, car tout nombre entier est décimal.

APPLICATION 2

1,1024 et 1,1026 conviennent, par exemple.

APPLICATION 3

Soit un nombre rationnel non décimal $\frac{a}{b}$. Dans la division euclidienne de a par b , le reste r est strictement inférieur au diviseur b . Ce reste ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs, à savoir $b - 1$ valeurs (les nombres entiers de 1 à $b - 1$). Ce qui fait que nécessairement, au bout de $b - 1$ calculs au plus, on retrouve un des restes déjà obtenus, ce qui définit la période.

Exemples :

En posant les divisions correspondantes, on peut vérifier que l'on a :

$\frac{17}{7} = 2,428571428571\dots$ (période à 6 chiffres) ; $\frac{17}{11} = 1,5454\dots$ (période à 2 chiffres)

APPLICATION 4

- ① Soit $n = 52,44444444\dots$. Alors $10n = 524,44444444\dots$
 $10n - n = 472$, soit $9n = 472$ et donc $n = \frac{472}{9}$.
- ② Soit $n = 2,548548548\dots$. Alors $1\,000n = 2\,548,548548548\dots$
 $1\,000n - n = 2\,546$, soit $999n = 2\,546$ et $n = \frac{2\,546}{999}$.
- ③ Soit $n = 13,52714141414\dots$. Alors $100n = 1\,352,714141414\dots$
 $100n - n = 1\,339,187$, soit $99n = 1\,339,187$ et $n = \frac{1\,339,187}{99} = \frac{1\,339\,187}{99\,000}$.

APPLICATION 5

- ① Soit $n = 3,99999\dots$. Alors $10n = 39,99999\dots$
 $10n - n = 36$, soit $9n = 36$ et donc $n = 4$.
- ② Soit $n = 52,4799999\dots$. Alors $100n = 5\,247,99999\dots$
 $100n - n = 5\,195,52$, soit $99n = 5\,195,52$ et donc $n = \frac{5\,195,52}{99} = 52,48$.

APPLICATION 6

❶

$15\,800 = 1,58 \times 10^4$
 $0,000000852 = 8,52 \times 10^{-7}$
 $25\,608\,970 = 2,560\,897 \times 10^7$
 $0,00025 = 2,5 \times 10^{-4}$

❷

$4,2 \times 10^8 = 420\,000\,000$
 $8,956\,847 \times 10^4 = 89\,568,47$

$333,33 = 3,3333 \times 10^2$
 $17,98 = 1,798 \times 10^1$
 $10,752 = 1,0752 \times 10^1$

$6,58 \times 10^{-5} = 0,000\,065\,8$
 $1,002506 \times 10^{-4} = 0,000\,100\,250\,6$

APPLICATION 7

Rappel : Pour tout entier relatif a , pour tout entier relatif b : $10^a \times 10^b = 10^{a+b}$
On obtient :

Nombre	Calcul	Écriture décimale	Notation scientifique
A	65×10^{12}	65 000 000 000 000	$6,5 \times 10^{13}$
B	$12,9888 \times 10^4$	129 888	$1,29888 \times 10^5$
C	$0,35 \times 10^2$	35	$3,5 \times 10^1$
D	$0,02 \times 10^{-1}$	0,002	2×10^{-3}

ENTRAÎNEMENTS

EXERCICE 1

Il faut penser à décomposer 115 en produits de facteurs premiers : $115 = 5 \times 23$.
Une solution possible est :

Un entier naturel	Un décimal non entier	Un rationnel non décimal
$\frac{115}{115}$	$\frac{23}{115}$	$\frac{5}{115}$
$\frac{115}{23}$	$\frac{115}{10}$	$\frac{115}{7}$

EXERCICE 2

- ❶

La question peut s’écrire : « Trouver un nombre décimal compris entre 3,0001 et 3,0100. »
Ainsi, 3,0025 est une solution au problème.
- ❷

D’après ce qui précède, 3,00258888... convient.
- ❸

$\frac{18}{31} = \frac{180}{310}$ et $\frac{19}{31} = \frac{190}{310}$, donc une fraction qui s’intercale entre $\frac{18}{31}$ et $\frac{19}{31}$ peut être $\frac{181}{310}$.
- ❹

$\frac{5}{7} = \frac{55}{77}$ et $\frac{17}{11} = \frac{119}{77}$, donc une fraction qui s’intercale entre $\frac{5}{7}$ et $\frac{17}{11}$ peut être $\frac{59}{77}$.

EXERCICE 3

① $\frac{54}{1\,350} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}$ donc ce nombre est décimal.

$\frac{5}{100} = \frac{5}{10^2}$ est décimal.

$\frac{17}{1\,024} = \frac{17}{2^{10}}$, donc ce nombre est décimal.

$\frac{50}{1\,275} = \frac{2}{3 \times 17}$, donc ce nombre n'est pas décimal.

CONSEIL

Utiliser les définitions de la partie disciplinaire du cours.

② a. $\frac{n}{1\,050}$ est un nombre entier si et seulement si n est multiple de 1 050, c'est-à-dire si et seulement si l'on peut écrire $n = 1\,050k$, avec $k \in \mathbb{N}$.

En effet, on a alors $\frac{n}{1\,050} = \frac{1\,050k}{1\,050} = k$.

b. $1\,050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$

Donc, $\frac{n}{1\,050}$ est décimal si et seulement si on peut simplifier cette fraction par 3 et 7, c'est-à-dire si et seulement si n est multiple de 21.

c. D'après ce qui précède, $\frac{n}{1\,050}$ est rationnel non décimal si et seulement si on ne peut pas simplifier cette fraction par 3 ou 7, donc si et seulement si n n'est pas multiple de 3 ou de 7.

③ $41 = 333 \times 0,123 + 0,041$, donc $\frac{41}{333} = \frac{333 \times 0,123}{333} + \frac{0,041}{333}$, donc $\frac{41}{333} = 0,123 + \frac{0,041}{333}$.
On a alors $0,041 = 333 \times 0,000123 + 0,000\,041$, et on continue en substituant cette écriture de 0,041 dans $\frac{41}{333} = 0,123 + \frac{0,041}{333}$, ce qui donne $\frac{41}{333} = 0,123\,123 + \frac{0,000041}{333}$ et ainsi de suite.

On a alors $\frac{41}{333} = 0,123123123\dots$

④ Si $\frac{171}{13\,888\,750} = \frac{41}{3\,330\,000}$ alors leurs produits en croix sont égaux.

Or $41 \times 13\,888\,750 = 569\,438\,750$ et $171 \times 3\,330\,000 = 569\,430\,000$
et donc les deux nombres proposés sont différents.

EXERCICE 4

Pour simplifier les fractions proposées, il n'est pas nécessaire de décomposer chacun de leurs termes en produit de facteurs premiers. Il suffit de trouver des facteurs communs, premiers ou non.

$$\frac{42}{78} = \frac{6 \times 7}{6 \times 13} = \frac{7}{13}$$

$$\frac{204}{136} = \frac{3 \times 4 \times 17}{2 \times 4 \times 17} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{4\,095}{3\,465} = \frac{5 \times 7 \times 9 \times 13}{5 \times 7 \times 9 \times 11} = \frac{13}{11}$$

$$\frac{4\,716}{35\,370} = \frac{2 \times 2 \times 9 \times 131}{2 \times 3 \times 5 \times 9 \times 131} = \frac{2}{15}$$

EXERCICE 5

① $\frac{29}{55} = \frac{29}{5 \times 11}$ n'est pas un nombre décimal, puisque écrit sous la forme d'une fraction irréductible dont le dénominateur contient le facteur 11.

$\frac{39}{75} = \frac{13}{25} = \frac{13}{5^2}$ est un nombre décimal, puisque s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible dont le dénominateur est une puissance de 5.

② $55 = 5 \times 11$ et $25 = 5^2$, donc le dénominateur commun aux deux fractions est $5^2 \times 11 = 275$
 $\frac{29}{55} = \frac{29 \times 5}{55 \times 5} = \frac{145}{275}$ et $\frac{39}{75} = \frac{13}{25} = \frac{13 \times 11}{25 \times 11} = \frac{143}{275}$

On en conclut que $\frac{29}{55} > \frac{39}{75}$.

③ $\frac{29}{55} = \frac{1450}{2750}$ et $\frac{39}{75} = \frac{143}{275} = \frac{1430}{2750}$

Puisque $2750 = 11 \times 250$, et que $1430 = 11 \times 130$, il faut faire apparaître un multiple de 11 au dénominateur qui ne soit pas égal à 1430, on choisit $1430 + 11 = 1441$.

Un nombre décimal compris entre les deux nombres est donc par exemple $\frac{1441}{2750}$.

④ Un nombre rationnel non décimal compris entre les deux fractions est, par exemple, $\frac{144}{275}$.

VERS L'ORAL

EXERCICE 6

- ① Cette situation est à proposer au cycle 2, en CP.
- ② L'objectif d'apprentissage est d'organiser un regroupement par 10.
- ③ La compétence visée est d'être capable de dénombrer.
- ④ Le prérequis à cette activité est d'avoir acquis l'itération de l'unité.
- ⑤ L'attendu de fin de cycle correspondant à cette situation est de dénombrer des collections en les organisant ; l'élève réussit notamment à dénombrer des collections en utilisant des groupements par 10.
- ⑥ Pendant la phase de recherche de la séance, l'enseignant devra observer les procédures des élèves et lister les différentes stratégies de résolution.
 Cet exercice doit amener l'élève à dénombrer (compter) pour faire des paquets de 10 pommes (groupement par 10). Pour y parvenir, il peut :
 – s'appuyer sur la comptine numérique soit : visuellement ; mentalement ; avec l'aide des doigts ; en écrivant 1 sur la 1^{re} pomme, 2 sur la 2^e, etc. (en écriture chiffrée) ;
 – compter de 2 en 2 jusqu'à 10 pour faire des groupements par 10 ;
 – compter de 5 en 5 pour faire des groupements par 10 (pour les plus experts).
- ⑦ **Piste de leçon.** Dans une séance, cet exercice est intéressant pour aborder une première recherche sur le groupement par 10 (comment organiser de manière efficace les regroupements par 10 ?). Cette situation de recherche est à mener en **phase de découverte**.

En effet, cet exercice correspond davantage à une phase de découverte de la notion car il permet à l'enseignant d'observer et de référencer les différentes stratégies de

résolution utilisées par les élèves pour ensuite les confronter et les comparer. Il s'agira ensuite de demander aux élèves de justifier leur(s) choix (argumenter), puis d'en tirer avec eux la (ou les) procédure(s) experte(s). La trace écrite (phase d'institutionnalisation) sera co-construite à partir de cette mise en commun (phase de synthèse). Ci-après, des exemples de situations qui pourraient être un prolongement possible de cette leçon.

Activités de consolidation

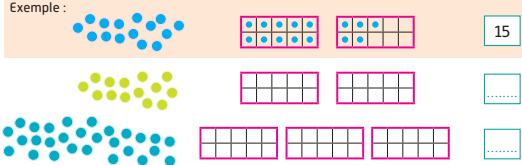
3 PROBLÈME Compte les croquettes de Pacha en faisant des paquets de 10.



Complète :
Pacha a renversé croquettes.

4 Place les jetons dans les cartes à points et écris le nombre.

Exemple :



8 Remédiations possibles :

- Retravailler des exercices en lien avec la correspondance terme à terme et la frise numérique.
- Parfaire l'exercice de comptage, en récitant par exemple la suite numérique de 1 à 10 et en barrant les pommes au fur et à mesure.
- Manipuler, faire vivre la situation aux élèves (ex. : proposer un jeu de manipulation avec des jetons ; en EPS, se regrouper par 5 puis par 10 pour former une équipe...).

Des questions supplémentaires à propos de l'articulation savoirs disciplinaires-savoirs enseignés sont disponibles en ligne sur : www.vuibert.fr/site/213959

2

Numération de position

Savoir-faire à maîtriser pour le concours :

- Comprendre le fonctionnement du système de numération de position et le principe des échanges d'unité.
- Savoir faire la décomposition canonique d'un nombre dans un système de position à base donnée.
- Connaître les différentes unités de la numération décimale de position pour les nombres entiers et les relations qui les lient.
- Composer, décomposer les grands nombres entiers en utilisant des regroupements par milliers.
- Connaître l'écriture générale d'un nombre en base 10 et en base n .
- Savoir écrire un nombre ou une opération en changeant de base.
- Trouver le successeur ou le prédécesseur d'un nombre en base n .
- Maîtriser le système numérique sexagésimal, pour les calculs de durées notamment.

AUTOÉVALUATION

Pour chaque question, il peut y avoir plusieurs bonnes réponses.

- Les nombres du type $a0a0a_{10}$ (a étant un chiffre du système décimal) sont :

☐ a. des nombres pairs	☐ b. toujours divisibles par 7
☐ c. multiples de 21	☐ d. parfois divisibles par 9
- Soit N un nombre entier naturel écrit dans le système décimal avec deux chiffres et se terminant par 3. On note d son chiffre des dizaines. Alors :

☐ a. N^2 peut être pair
☐ b. le nombre de dizaines de N^2 est toujours pair
☐ c. le nombre de centaines de N^2 est d^2
☐ d. le chiffre des dizaines de N^2 peut être égal au chiffre des unités de N
- On considère deux nombres entiers à trois chiffres, tels que les chiffres figurant dans l'écriture de l'un figurent également dans l'écriture de l'autre. Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont vraies ?

☐ a. Si leur différence est un multiple de 9, alors l'un des deux nombres est un multiple de 9.
☐ b. Leur différence est un multiple de 9.
☐ c. On ne peut pas savoir si leur différence est un multiple de 9, cela dépend des nombres considérés.
☐ d. Si l'un des deux nombres est un multiple de 6, alors leur différence est un multiple de 6.

4 N est un nombre entier positif à deux chiffres se terminant par 5. On note d le chiffre des dizaines :

- ☐ a. N peut s'écrire $10d + 5$ ☐ b. le nombre N^2 est un multiple de 25
☐ c. le nombre de centaines de N^2 est d^2
☐ d. le chiffre des dizaines de N^2 n'est jamais égal au chiffre des dizaines de N

5 $2 + 3^3 + 3^6$ s'écrit en base 3 :

- ☐ a. $200300\bar{3}_3$ ☐ b. $300300\bar{2}_3$ ☐ c. $100100\bar{2}_3$ ☐ d. $33\bar{2}_3$

6 Le successeur de 88_9 est :

- ☐ a. $88\bar{1}_9$ ☐ b. $88\bar{0}_9$ ☐ c. 89_9 ☐ d. 100_9

7 Le prédécesseur de 420_5 est :

- ☐ a. 320_5 ☐ b. 410_5 ☐ c. 414_5 ☐ d. 419_5

8 Le double de 2000_3 s'écrit en base 3 :

- ☐ a. 4000_3 ☐ b. $200\bar{2}_3$ ☐ c. 11000_3 ☐ d. 22000_3

9 $134_5 + 231_5 =$

- ☐ a. 365_5 ☐ b. 320_5 ☐ c. 420_5 ☐ d. 4200_5

CONSEILS

Les exercices mettant en jeu la numération sont toujours assez techniques. Si les questions proposées peuvent sembler difficiles, elles ne font appel qu'à deux connaissances principales : la décomposition canonique d'un nombre dans un système de position à base donnée et le principe des échanges d'unités.

En ce qui concerne la première connaissance, elle se traduit ainsi (par exemple pour un nombre à quatre chiffres dans un système à base B) : $abcd_B = a \times B^3 + b \times B^2 + c \times B + d$.

En ce qui concerne la seconde connaissance, on rappelle que la base d'un système est le nombre d'unités d'un certain ordre nécessaire pour former une unité de l'ordre immédiatement supérieur. Par exemple, dans le système décimal, 10 unités valent 1 dizaine, 10 dizaines valent 1 centaine, et ainsi de suite, ce qui explique la notion de retenue dans les opérations.

Les questions 1, 2 et 4 mettent en jeu la décomposition canonique d'un nombre dans le système décimal. Cette décomposition est très importante car elle met en évidence la structure « intime » du nombre, puisque tout nombre écrit dans ce système est une notation raccourcie de ce nombre. Par exemple, on sait lire le nombre 3 418 (trois-mille-quatre-cent-dix-huit), mais on ne « voit » pas les quantités « mille », « cent » et « dix ». Cela s'apprend à l'école primaire, avec plus ou moins de difficultés, puis, lorsque nous avons acquis cette connaissance, la lecture nous paraît naturelle et simple, alors qu'elle n'est pas du tout naturelle.

La question 3 peut sembler difficile. Quand on n'a pas d'idée sur une question posée dans un domaine général, on commence toujours par chercher sur quelques cas particuliers.

La question 5 ne fait pas apparaître les chiffres significatifs du nombre dans la base 3, à l'exception du chiffre des unités. De plus, les puissances de la base sont écrites dans l'ordre contraire à l'écriture usuelle. Ce qui crée deux difficultés apparentes.

Les difficultés que l'on peut rencontrer dans les questions 3, 4, 5 et 6 sont les mêmes que celles d'un élève de CP rencontre lorsqu'il apprend les règles d'écriture et de calcul des nombres dans le système décimal, ce qui permet de se mettre à la portée d'un tel élève et nous rappelle que les règles de calcul dans un système de numération de position à base sont très ingénieuses.

Si vous avez rencontré des difficultés pour répondre aux questions de ce QCM, cela est dû au fait que la numération, qui est particulièrement technique, ne s'étudie ni au collège, ni au lycée. Nous vous conseillons de refaire à nouveau ces questions après avoir étudié le cours.

CORRIGÉS

❶ **b., c. et d.** Car $\overline{a0a0a_{10}} = 10101a$ et $10101 = 3 \times 7 \times 481$.

→ Cours p. 44

❷ **b.** Un tel nombre s'écrit $\overline{d3}$, soit $10d + 3$.

On a alors :

$$N^2 = 100d^2 + 60d + 9$$

$$N^2 = 10(10d^2 + 6d) + 9$$

a. Faux, puisque N^2 se termine par 9.

b. Vrai, car ce nombre est $10d^2 + 6d$, soit encore $2(5d^2 + 3d)$.

c. Faux. Contre-exemple : $43^2 = 1\,849$ possède 18 centaines et $4^2 = 16$.

d. Faux, puisque le nombre de dizaines de N^2 est toujours pair, il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8, et le chiffre des unités de N est 3.

→ Cours p. 44

❸ **b.** On commence par chercher sur des cas particuliers, on constate que la différence des deux nombres choisis est toujours multiple de 9. La démonstration se fait en considérant l'écriture générale d'un nombre à 3 chiffres dans le système décimal, et l'écriture de ce même nombre obtenue en changeant ses chiffres de place, par exemple, $\overline{abc}$ et $\overline{cab}$.

$$\overline{abc} - \overline{cab} = 100a + 10b + c - 100c - 10a - b = 90a + 9b - 99c = 9(10a + b - 11c)$$

La réponse d. est fausse : 612 est multiple de 6 ($612 = 6 \times 102$) et $612 - 261 = 351$.

Or, 351 n'est pas divisible par 6 puisque $351 = 58 \times 6 + 3$.

→ Cours p. 44

❹ **a. et b.** Un tel nombre s'écrit $N = 10d + 5$. Et $N^2 = (10d + 5)^2 = 100d^2 + 100d + 25$

Par conséquent, $N^2 = 25(4d^2 + 4d + 1)$.

Le nombre de centaines de N^2 est $d(d + 1)$ et l'égalité $25^2 = 625$ prouve que d. est faux.

→ Cours p. 45-47

❺ **c.** $2 + 3^3 + 3^6 = 1 \times 3^6 + 0 \times 3^5 + 0 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 0 \times 3 + 2 = \overline{1001002}_3$

→ Cours p. 45-47

❻ **d.** $\overline{88}_9$ est le plus grand nombre à 2 chiffres écrit en base 9, donc son successeur est le plus petit nombre à 3 chiffres dans cette même base.

→ Cours p. 45-47

❼ **c.** Car le chiffre « 2 » représente 2 paquets de 5, on en « prend » donc un, il en reste un, et de ce paquet, on retire une unité, il en reste donc quatre.

→ Cours p. 45-47

❽ **c.** Car $4 = 1 \times 3 + 1 = \overline{11}_3$ (on peut lire cette égalité : « 1 paquet de 3 et 1 unité »).

→ Cours p. 45-47

❾ **c.** Car $5 = \overline{10}_5$ et $7 = \overline{12}_5$ (on peut lire ces égalités : « 1 paquet de 5 et 0 unités » et « 1 paquet de 5 et 2 unités »).

→ Cours p. 45-47

COURS

Sommaire

1. Généralités
2. Systèmes de numérations à base

1 Généralités

A. Définition

La numération est la science qui permet de représenter, lire et écrire les nombres entiers naturels. Il y a donc une numération parlée et une numération écrite.

Un système de numération se compose :

- d'un **alphabet** formé de chiffres, symboles de représentation ;
- d'un **code**, ensemble de règles.

Il existe différents types de numération, dont les numérations additives (par exemple, les numérations romaine ou égyptienne primitives) et les numérations de positions, encore appelées systèmes de position à base, par exemple, le système décimal.

B. Quelques systèmes anciens

a. Système en usage chez les Grecs de l'Antiquité

Le système en usage chez les Grecs a pour caractéristiques principales :

- pas de zéro ;
- système ordinal ;
- système additif.

Les nombres sont représentés par les lettres de l'alphabet et par trois lettres archaïques. Ainsi α représente le nombre 1, β le nombre 2, γ le nombre 3, et ainsi de suite. Après 9, les lettres représentent 10, 20, 30... la dernière lettre ω représentant le nombre 800. Il y a ensuite un système de notations pour les unités supérieures, qui consiste à utiliser toujours les lettres de l'alphabet en leur accolant divers symboles. Pour écrire un nombre, on accole alors les différentes unités qui le composent.

EXEMPLE

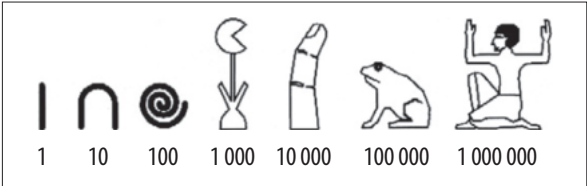
$$\omega\pi\delta = 884$$

b. Système en usage chez les Égyptiens de l'Antiquité

Le système en usage chez les Égyptiens a pour caractéristiques principales :

- pas de zéro ;
- système à base 10, c'est-à-dire avec un symbole pour chaque puissance de 10, de $10^0 = 1$ à $10^6 = 1\,000\,000$;
- système cardinal additif.

Les 7 chiffres représentés par 7 hiéroglyphes



L'écriture d'un nombre s'obtient en juxtaposant les différents chiffres autant de fois que nécessaire pour obtenir la valeur correspondante de ce nombre. On ne peut juxtaposer plus de 9 chiffres identiques, obtenant ensuite l'unité supérieure.

EXEMPLE
C\IIII est le nombre 115.

c. Système en usage chez les Romains de l'Antiquité

Le système des Romains de l'Antiquité a pour caractéristiques principales :

- pas de zéro ;
- alphabet composé de 7 chiffres ;
- systèmes cardinal additif et soustractif.

Les 7 chiffres représentés par des lettres de l'alphabet

I	V	X	L	C	D	M
un	cinq	dix	cinquante	cent	cinq-cents	mille

Tout entier se représente par une juxtaposition de chiffres en commençant par les unités les plus grandes.

On s'interdit de juxtaposer plus de 4 chiffres identiques, sauf en ce qui concerne le chiffre M.

L'entier représenté est obtenu en additionnant tous les chiffres qui le représentent, mais si un chiffre est écrit à gauche d'un chiffre d'ordre supérieur, il se soustrait à celui-ci.

EXEMPLES
XCIX représente le nombre 99. LXXXVII représente le nombre 87.

2 Systèmes de numérations à base

A. Numération décimale (base 10)

a. Notion de base

Ce système de numération, encore appelé **système de numération de position à base dix**, permet d'écrire tous les nombres entiers naturels – contrairement aux anciens systèmes qui ne le permettaient pas, comme les systèmes décrits précédemment, en usage chez les Grecs, les Égyptiens ou les Romains de l'Antiquité – en utilisant 10 symboles appelés les chiffres de la numération. Ces chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

O

Ordonnée 128, 230

P

Parallélépipède 228, 230

Parallélisme 223

Parallélogramme 168, 169, 171, 201, 252

Patron 227

Pavé droit 225, 228, 253

Pourcentage 292

Prisme 225

Probabilités 346, 349

Produit 67, 68, 72, 73, 98, 250, 365

Programme 387, 390, 394

Proportionnalité 204, 269, 270, 275, 276,
292, 295, 313

Puissance 26, 41, 68, 388

Pyramide 253

Q

Quatrième proportionnelle 274, 288

Quotient 69, 70, 71, 72, 99, 251

R

Racine carrée 68

Réduction 204, 295

Reste 66, 69, 70, 71, 72, 99, 392

Rotation 203

S

Section plane 228

Sinus 147

Somme 64, 65, 70, 72, 272, 329, 350, 388

Somme des angles d'un triangle 146

Symétrie 169, 170, 202, 203

T

Tangente 147

Théorème de Pythagore 191, 248

Théorème de Thalès 176, 192, 204

Translation 201

Triangles semblables 175

V

Variable 312, 395

Vitesse 251, 270, 296

Volume (boule) 253

Volume (cône) 253

Volume (cylindre) 253

Volume (pyramide) 253

Copyrights

p. 242 : La photo des polydrons a été reproduite grâce à l'aimable autorisation de la marque. – p. 258 : Photos Valérie Bouquillon.

Certains exercices de ce manuel sont extraits de sujets d'annales du CRPE de 1997 à 2020.

Les pages de manuels utilisés dans les exercices d'entraînement sont extraits de manuels des éditions Magnard :

Exercice 6 p. 32 : *Outils pour les maths CP*. – Exercice 6 p. 37 : *Archimaths CE1*. – Exercice 7 p. 51 : *Tribu des maths*. – Exercice 11 p. 78 : *Tribu des maths CE1*, (à l'exception de l'exercice C), *Archimaths CE1*, *Outils pour les maths CE1*, *Archimaths CE1 « Mémo des maths »*. – Exercice 6 p. 131 : *Archimaths CE1*. – Exercice 7 p. 151 : *Tribu des maths*, *Outils pour les maths*. – Exercice 8 p. 152 : *Archimaths CM2*. – Exercice 8 p. 162 : *Archimaths CM2 « Mémo des maths »*. – Exercice 6 p. 178 : *Archimaths CE1*. – Exercice 6 p. 187 : *Archimaths CE1*, « *Mémo des maths* ». – Exercice 8 p. 207 : *Tribu des maths*, *Outils pour les maths*. – Exercice 5 p. 235 : *Outils pour les maths CP*, *Archimaths CP*. – Exercice 5 p. 243 : *Archimaths CE2 « Mémo des maths »*. – Exercice 12 p. 279 : *Archimaths CM1*, *Archimaths CM2*. – Exercice 12 p. 286 : *Archimaths CM2*. – Exercice 11 p. 300 : *Tribu des maths*.

MATHS

CRPE 2023

2^e édition

Le manuel pour réussir l'épreuve écrite

- **Des tests d'autoévaluation** pour personnaliser ses révisions
- **Tous les savoirs disciplinaires** pour maîtriser le programme
- **La méthode de l'épreuve** pour répondre aux attentes du jury
- **120 exercices corrigés** pour mettre en application les notions, s'entraîner à l'écrit et anticiper l'oral
- **Un sujet officiel de la session 2022 corrigé et commenté** pour se mettre dans les conditions du jour J

OFFERT
en ligne

- Le guide du concours
- 150 QCM
- + Sujet 2022 corrigé

Dans la même collection

ADMISSIBILITÉ

ADMISSION



N°1 Vuibert
DES CONCOURS

ISBN : 978-2-311-21395-9



9 782311 213959